

## HAUPTAUFSÄTZE

### Zur Membrantheorie der Drehschalen negativer Krümmung.

Herrn Prof. Dr. L. Prandtl zum 70. Geburtstag.

Von W. Flügge in Kresbronn.

*Für Drehschalen negativer Krümmung hat die Differentialgleichung der Membranschnittkräfte reelle Charakteristiken. Daraus folgen Besonderheiten des Spannungszustandes, durch die sich diese Schalen von den kuppelartigen Schalen positiver Krümmung wesentlich unterscheiden. Sie werden mit mathematisch einfachen Mitteln dargestellt, und es wird auf die Notwendigkeit einer genaueren Untersuchung hingewiesen.*

*With regard to rotary shells of negative curvature the method of the differential equation of the membrane intersecting forces has to show real characteristics. Thereupon are resulting particularities on the elasticity state by which these shells are essentially differentiating of dome-shaped shells of positive curvature. They are produced by simple mathematical means; great stress, however, is laid on the necessity of more careful researches.*

*En ce qui concerne les coquilles rotatives de courbure négative la méthode de l'équation différentielle des forces d'intersection de membrane dispose de réelles caractéristiques. De là résultent des particularités de l'état d'élasticité par lesquelles ces coquilles en question se distinguent essentiellement des coquilles de courbure positive. Elles sont reproduites par de simples moyens mathématiques; toutefois grande valeur est attachée à la nécessité d'une investigation plus exacte.*

Для переменных (вращающихся) вкладышей негативного искривления, дифференциальные уравнения сочетательных сил мембраны располагают реальными характеристиками. Из этого вытекают особенности состояния напряжения, значительно отличающие эти вкладыши от куполообразных вкладышей позитивного искривления. Они изображаются математически-простыми средствами. Обращается внимание на необходимость точного исследования.

In der bautechnischen Literatur ist gelegentlich über den Bau von Kühltürmen aus Eisenbeton berichtet worden, die in Form dünner Hyperboloidschalen ausgeführt sind und an ihrem unteren Rand auf einer großen Zahl von Einzelstützen ruhen. Aus diesen Berichten ist nicht zu erkennen, daß man sich bei der Berechnung dieser Bauwerke der Besonderheiten bewußt geworden ist, durch die sich die Statik solcher Drehschalen negativer Krümmung sehr wesentlich von der der Kuppeln unterscheidet. Es ist das Ziel dieser Ausführungen, diese Unterschiede zu zeigen und auf die ganze Problematik der Membrantheorie negativ gekrümmter Schalen hinzuweisen.

Die Membrantheorie der Drehschalen geht bekanntlich aus von den drei Gleichgewichtsbedingungen der Schnittkräfte am Schalelement. Diese Schnittkräfte sind die in Schnitten längs der Koordinatenlinien je Einheit der Schnittlänge übertragenen inneren Kräfte, nämlich die Meridianlängskraft  $N_\varphi$ , die Ringkraft  $N_\theta$  und die Schubkräfte  $N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi}$  (Bild 1). Das Gleichgewicht dieser Kräfte und der auf dem Schalelement liegenden Lasten in Richtung der Koordinatenlinien und der Schalenormalen führt auf die drei Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 N_\varphi) + r_1 \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} - r_1 N_\theta \cos \varphi + Y r_0 r_1 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (r_0 N_{\varphi\theta}) + r_1 \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + r_1 N_{\varphi\theta} \cos \varphi + X r_0 r_1 = 0,$$

$$\frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} = -Z.$$

Es sind zwei Differentialgleichungen und eine einfache lineare Gleichung. Mit dieser letzten kann man eine der Längskräfte, etwa die Längskraft  $N_\theta$ , eliminieren und behält dann ein lineares Differentialgleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} r_0 \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + (r_1 + r_2) N_\varphi \cos \varphi + r_1 \frac{\partial N_{\varphi\theta}}{\partial \theta} &= -r_0 r_1 (Y + Z \cot \varphi), \\ r_0 \frac{\partial N_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + 2 r_1 N_{\varphi\theta} \cos \varphi - r_2 \frac{\partial N_\varphi}{\partial \theta} &= -r_0 r_1 \left( X - \frac{\partial Z}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \varphi} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots (1).$$

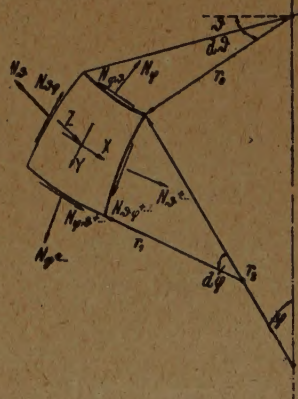


Bild 1.



Aus diesen beiden Gleichungen können wir, wenn wir wollen, auch noch  $N_{\varphi\vartheta}$  eliminieren. Wenn wir nämlich die zweite nach  $\vartheta$  differenzieren, so enthält sie  $\frac{\partial N_{\varphi\vartheta}}{\partial \vartheta}$  und  $\frac{\partial^2 N_{\varphi\vartheta}}{\partial \varphi \partial \vartheta}$ . Die erste Ableitung können wir mit der ersten der beiden vorstehenden Gleichungen eliminieren, die zweite Ableitung, wenn wir dieselbe Gleichung noch einmal nach  $\varphi$  differenzieren. Wir wollen die so entstehende Gleichung nicht im einzelnen ausrechnen, denn sie enthält recht umständliche Koeffizienten. Wesentlich für uns ist nur, daß sie die zweiten Ableitungen von  $N_{\varphi}$  in der Form

$$\frac{\partial^2 N_{\varphi}}{\partial \varphi^2} + \frac{r_1}{r_2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 N_{\varphi}}{\partial \vartheta^2}$$

enthält; denn daraus kann man eine wichtige Folgerung ziehen: Der Koeffizient von  $\frac{\partial^2 N_{\varphi}}{\partial \vartheta^2}$  hat dasselbe Vorzeichen wie das Krümmungsmaß  $\frac{1}{r_1 r_2}$  der Fläche. Sind beide positiv, so ist die Differentialgleichung von elliptischem Typ, und das hat zur Folge, daß sich Unstetigkeiten der Randwerte nicht in das Innere der Schale fortpflanzen, sondern sich ausgleichen, wie das z. B. von Kuppeln auf Punktstützen bekannt ist<sup>1)</sup>. Hat dagegen die Schale negative Krümmung, so ist der Koeffizient von  $\partial^2 N_{\varphi} / \partial \vartheta^2$  negativ, die Gleichung also von hyperbolischem Typ. Solche Gleichungen besitzen reelle Charakteristiken, d. h. Kurven auf der Schalenfläche, längs deren sich Unstetigkeiten der Randwerte über die ganze Schale fortpflanzen. Dadurch treten im Kräftespiel der negativ gekrümmten Schale Erscheinungen auf, die der an Schalen positiver Krümmung geschulten Anschauung zunächst überraschend erscheinen und schon beim Entwurf von Schalenkonstruktionen Berücksichtigung erfordern. Aus dem Vorhandensein reeller Charakteristiken entspringt aber auch ein Lösungsverfahren für die Differentialgleichungen. Diese Dinge sollen hier an dem einfachsten Beispiel, dem Rotationshyperboloid, durchgeführt werden.

Die in Bild 2 in Grund- und Aufriß dargestellte Schale hat die Gleichung

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Schneidet man sie mit einer Ebene, die sie in einem Punkt des Kreises  $z=0$  berührt, etwa mit der Ebene  $y=a$ , so erhält man durch Einsetzen in die Hyperboloidgleichung für die Schnittkurve

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{z^2}{b^2},$$

also ein Geradenpaar  $x = \pm \frac{a}{b} z$  mit der Neigung

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$  gegen die Grundrißebene. Auf dem Hyperboloid gibt es also zwei Scharen von geraden Linien, seine Erzeugenden. Wir stellen zunächst noch einiges über die Geometrie dieser Linien fest:

Bild 3 zeigt die beiden Erzeugenden, die durch einen beliebigen Punkt  $A$  des Hyperboloids gehen. Wir bestimmen den Winkel  $\beta$ , unter dem sie sich schneiden. Auf der Meridiantangente ist eine Strecke  $AC$  der Länge 1 abgegrenzt. Ihre Projektion auf die Lotrechte durch  $A$  hat die Länge  $AB = \sin \varphi$ . Aus dem Dreieck  $ABD$  folgt  $AD = \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha}$  und damit aus dem Dreieck  $ADC$ :

$$\cos \frac{\beta}{2} = \frac{1}{AD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} \quad \dots \quad (2).$$

Ferner interessiert der Winkel  $\omega$  zwischen den beiden Meridianebenen, die eine Erzeugende im Kehlkreis und in einem beliebigen Punkt der Schale schneiden. Nach Bild 2 ist

$$\cos \omega = \frac{a}{r_0} \quad \dots \quad (3).$$

Für die Krümmungsradien liefert die analytische Geometrie die Formeln

$$r_1 = -\frac{a^2 b^2}{(a^2 \sin^2 \varphi - b^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}}, \quad r_2 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi - b^2 \cos^2 \varphi}} \quad \dots \quad (4).$$

<sup>1)</sup> Vgl. z. B. W. Flügge, Statik und Dynamik der Schalen. Berlin 1934, S. 48.

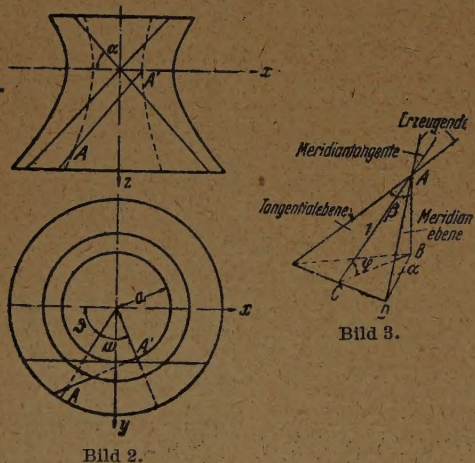


Bild 3.

Bild 2.



Damit kann man auch schreiben:

$$\cos \omega = \frac{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi - b^2 \cos^2 \varphi}}{a \sin \varphi} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \cot^2 \varphi} \dots \dots \dots (5).$$

Nach diesen geometrischen Vorbereitungen können wir an eine einfache statische Überlegung herangehen. In Bild 4a ist auf der Schale ein durch zwei benachbarte Gerade der gleichen Erzeugendenschar begrenzter Streifen eingezeichnet. Leitet man in ihn an seinem einen Ende eine Kraft  $P$  ein, so ist er und damit die ganze Schale offenbar im Gleichgewicht, wenn dieselbe Kraft  $P$  in entgegengesetzter Richtung an seinem anderen Ende angreift und der Streifen dadurch wie ein einfacher Zugstab beansprucht wird. Wir haben damit einen Spannungszustand vor uns, der eine Lösung der Differentialgleichungen (1) sein muß, und wir können uns auch überzeugen, daß es der einzig mögliche ist, wenn die Kraft  $P$  an dem einen Rand als Last gegeben ist und der andere Rand gestützt ist. Um das einzusehen, wollen wir aus der Schale ein Element heraus schneiden, das durch je zwei benachbarte Erzeugende jeder Schar begrenzt ist (Bild 4b). Die in seinen Kanten wirkenden inneren Kräfte zerlegen wir in Richtung der Erzeugenden in schiefe Längskräfte  $N_\xi, N_\eta$  und die zugehörigen Schubkräfte  $N_{\xi\eta} = N_{\eta\xi}$ . Wenn wir für diese Kräfte das Gleichgewicht in Richtung der Schalennormalen aufstellen, so tragen die schiefen Längskräfte dazu nichts bei, denn sie haben ja wegen der Geradlinigkeit der Erzeugenden an gegenüberliegenden Seiten genau die gleiche Wirkungslinie, können also höchstens eine Resultierende in dieser Richtung haben, aber nicht normal dazu. Dagegen liefern die Schubkräfte Beiträge, denn die Kräfte  $N_{\xi\eta}$  auf zwei gegenüberliegenden Seiten sind nicht parallel, da sie ja die Richtung von zwei verschiedenen Erzeugenden derselben Schar haben, die einen kleinen Winkel miteinander einschließen. Wir wollen es uns hier ersparen, diesen Winkel festzustellen und die Gleichung explizit anzuschreiben, sondern begnügen uns mit der Feststellung, daß sie die Form haben muß:  $N_{\xi\eta}$  multipliziert mit einem aus der Form der Schale folgenden nicht verschwindenden Koeffizienten ist gleich der Normallast  $Z$ . Daraus folgt, daß die nur am Rande belastete Schale im Schnittsystem der Erzeugenden keine Schubkräfte  $N_{\xi\eta}$  hat, daß also die Last  $P$ , die an einer Seite in den Streifen zwischen zwei Erzeugenden eingeleitet wird, nicht seitlich aus ihm herauskann, sondern bis zum anderen Schaleneck durchlaufen muß, wo sie als Einzelkraft auf die Stützung wirkt.

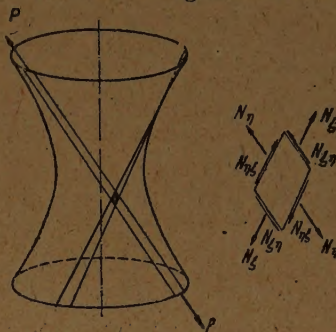


Bild 4 a und b.

Ein solcher Spannungszustand ist eine physikalische Unmöglichkeit; denn wenn nur längs eines schmalen Streifens in der Schale starke Spannungen und daher auch große Dehnungen vorhanden wären, so würde er ja gar nicht mehr in den Zusammenhang des Ganzen hineinpassen. Da die Membrantheorie nichts anderes liefert, so muß also in diesem Falle die Biegesteifigkeit der Schale eine wesentliche Rolle spielen. Wie sich dadurch der Spannungszustand umgestaltet, ob der kraftführende Streifen wenigstens in verschwommener Form durch die ganze Schale hindurch noch erkennbar bleibt oder ob ähnlich wie bei den Kuppeln in einer Randzone schon ein weitgehender Ausgleich der Spannungen zustande kommt, das läßt sich ohne Aufstellung der vollständigen Biegetheorie nicht vorhersagen.

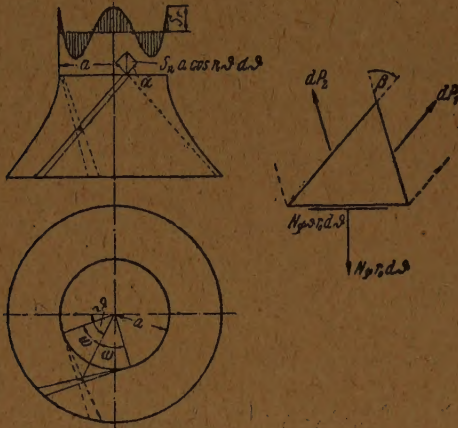
Bei anderen negativ gekrümmten Schalen, deren Charakteristiken keine geraden Linien sind, sieht der Spannungszustand etwas komplizierter aus. Eine am Rande wirkende Einzelkraft erzeugt dann Schnittkräfte nicht nur längs der beiden durch ihren Angriffspunkt gehenden Charakteristiken, sondern in dem ganzen dazwischen liegenden Gebiet. Die Berechnung wird dadurch etwas mühsamer und die Unverträglichkeit der Formänderungen weniger grob. Auf die Einzelheiten der Rechnung, die in der mathematischen Literatur zu finden sind <sup>2)</sup>, brauchen wir hier nicht einzugehen.

Daß die Membranlösung für eine Einzelkraft am Rande zu Schwierigkeiten im Formänderungszustand der Schale führt, ist kein Hindernis, aus ihr durch Integration die Lösung für stetige Randbelastungen aufzubauen, sobald man dabei auf Spannungszustände kommt, die stetig sind und somit die Verträglichkeitsforderung der Formänderung nicht mehr verletzen. Wir zeigen das für die Belastung des Kehlkreises mit einer harmonischen lotrechten Last  $N\varphi = S_n \cos n\vartheta$ . Dann wirkt auf ein Linienelement  $a \cdot d\vartheta$ , des Randkreises die lotrechte Kraft  $S_n a \cos n\vartheta d\vartheta$ , die wir in zwei Kräfte  $\frac{S_n a \cos n\vartheta d\vartheta}{2 \sin \alpha}$  in Richtung der beiden durch diesen Punkt gehenden Erzeugenden zerlegen (Bild 5a).

<sup>2)</sup> Vgl. z. B. Riemann - Weber: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, 8. Aufl. Braunschweig 1930, S. 793 ff.



Durch den Schalenpunkt mit den Koordinaten  $\varphi, \vartheta$  gehen die beiden Erzeugenden, die den Kehlkreis in den Meridianen  $\vartheta \pm \omega$  treffen. Betrachten wir in diesem Schalenpunkt ein dreieckiges Element (Bild 5b), das die obere Hälfte des in Bild 4b gezeichneten ist, so wirkt auf dessen rechte Seite die Kraft



$$dP_1 = \frac{S_n a \cos n(\vartheta + \omega) d\vartheta}{2 \sin \alpha}$$

und auf die linke

$$dP_2 = \frac{S_n a \cos n(\vartheta - \omega) d\vartheta}{2 \sin \alpha}$$

Auf die waagerechte Seite  $r_0 d\vartheta$  wirkt die Resultierende dieser beiden Kräfte mit der Meridiankomponente

$$N_\varphi r_0 d\vartheta = \frac{S_n a d\vartheta}{2 \sin \alpha} [\cos n(\vartheta + \omega) + \cos n(\vartheta - \omega)] \cos \frac{\beta}{2}$$

und der Schubkomponente

$$N_{\varphi\vartheta} r_0 d\vartheta = \frac{S_n a d\vartheta}{2 \sin \alpha} [\cos n(\vartheta + \omega) - \cos n(\vartheta - \omega)] \sin \frac{\beta}{2}$$

Daraus berechnen sich die Schnittkräfte durch Einsetzen der geometrischen Beziehungen Gl. (2), (3), (4), (5):

$$\begin{aligned} N_\varphi &= \frac{S_n a}{r_0} \frac{\cos n\vartheta \cos n\omega}{\sin \alpha} \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} = S_n \frac{\cos \omega \cos n\omega}{\sin \varphi} \cos n\vartheta, \\ N_\vartheta &= -N_\varphi \frac{r_2}{r_1} = S_n \frac{\cos \omega \cos n\omega}{\sin \varphi} \cos n\vartheta \frac{a^2 \sin^2 \varphi - b^2 \cos^2 \varphi}{b^2} \\ &= \frac{S_n a^2}{b^2} \cos^3 \omega \sin \varphi \cos n\omega \cos n\vartheta, \\ N_{\varphi\vartheta} &= -\frac{S_n a}{r_0} \frac{\sin n\vartheta \sin n\omega}{\sin \alpha} \sin \frac{\beta}{2} = -\frac{S_n a}{r_0} \frac{\sin n\vartheta \sin n\omega}{\sin \alpha} \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 \alpha}}{\sin \varphi} \\ &= -\frac{S_n a}{b} \cos^2 \omega \sin n\omega \sin n\vartheta. \end{aligned}$$

Ganz entsprechend findet man für eine Tangentialbelastung  $N_{\varphi\vartheta} = T_n \sin n\vartheta$  die beiden Kräfte

$$dP_1 = \frac{T_n a \sin n(\vartheta + \omega) d\vartheta}{2 \cos \alpha}, \quad dP_2 = -\frac{T_n a \sin n(\vartheta - \omega) d\vartheta}{2 \cos \alpha}$$

und daraus für das waagerechte Schnittelement  $r_0 d\vartheta$  die Kräfte

$$\begin{aligned} N_\varphi r_0 d\vartheta &= \frac{T_n a d\vartheta}{2 \cos \alpha} [\sin n(\vartheta + \omega) - \sin n(\vartheta - \omega)] \cos \frac{\beta}{2}, \\ N_{\varphi\vartheta} r_0 d\vartheta &= \frac{T_n a d\vartheta}{2 \cos \alpha} [\sin n(\vartheta + \omega) + \sin n(\vartheta - \omega)] \sin \frac{\beta}{2}. \end{aligned}$$

Drückt man wieder alles durch  $\varphi, \vartheta$  und  $\omega$  aus, so erhält man

$$\begin{aligned} N_\varphi &= \frac{T_n b}{a} \frac{\cos \omega}{\sin \varphi} \sin n\omega \cos n\vartheta, \\ N_\vartheta &= T_n \frac{a}{b} \sin \varphi \cos^3 \omega \sin n\omega \cos n\vartheta, \\ N_{\varphi\vartheta} &= T_n \cos^2 \omega \cos n\omega \sin n\vartheta. \end{aligned}$$

Diese Formeln geben die allgemeinste Lösung für eine beliebige Randbelastung. Es ist lehrreich, sie mit den bekannten Formeln für Schalen positiver Krümmung<sup>3)</sup> zu vergleichen, z. B. mit der geschlossenen Lösung für die Kugelschale mit zwei freien Rändern. Dort kann man nur ein Kräfte-

<sup>3)</sup> W. Flügge: Statik und Dynamik der Schalen. Berlin 1934, S. 43 bis 44.



system vorgeben, bei dem Längskraft und Schubkraft für jede Harmonische in festem Verhältnis zueinander stehen. Dagegen sind die Kräftesysteme, die man an den beiden Rändern vorschreiben kann, völlig unabhängig voneinander. Hier, bei der Schale mit negativer Krümmung, liegen die Verhältnisse durchaus anders. Wir können an einem Rande  $\varphi = \varphi_A$  beide Randschnittkräfte vorgeben:  $N_\varphi = N_{\varphi A} = N_{\varphi n A} \cos n \vartheta$ ,  $N_{\varphi \vartheta} = N_{\varphi \vartheta A} = N_{\varphi \vartheta n A} \sin n \vartheta$  und erhalten dann für  $S_n$  und  $T_n$  die Gleichungen

$$\begin{aligned} S_n \cos n \omega_A + T_n \frac{b}{a} \sin n \omega_A &= N_{\varphi n A} \frac{\sin \varphi_A}{\cos \omega_A}, \\ -S_n \frac{a}{b} \sin n \omega_A + T_n \cos n \omega_A &= N_{\varphi \vartheta n A} \frac{1}{\cos^2 \omega_A}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen kann man immer lösen, denn es ist ja immer  $\varphi_A \neq 0$ ,  $\omega_A < \frac{\pi}{2}$ , so daß die rechten Seiten nicht unendlich werden können, und auch die Nennerdeterminante  $\cos^2 n \omega_A + \sin^2 n \omega_A$  kann nicht 0 werden. Über die Schnittkräfte an dem zweiten Schalenrand ist damit aber schon verfügt. Dabei zeigt sich im allgemeinen, daß zu einer Belastung des einen Randes  $A$  nur mit Meridianlängskräften oder nur mit Schubkräften jedesmal eine Kombination von beiden am anderen Rande gehört.

Versucht man, ähnlich wie bei den positiv gekrümmten Schalen an jedem Rande eine der Schnittkräfte vorzugeben, so kommt man auf ein anderes Gleichungspaar für  $S_n$ ,  $T_n$ , z. B. wenn man an beiden Rändern  $A$  und  $B$  die Längskräfte geben will:

$$\begin{aligned} S_n \cos n \omega_A + T_n \frac{b}{a} \sin n \omega_A &= N_{\varphi n A} \frac{\sin \varphi_A}{\cos \omega_A}, \\ S_n \cos n \omega_B + T_n \frac{b}{a} \sin n \omega_B &= N_{\varphi n B} \frac{\sin \varphi_B}{\cos \omega_B}. \end{aligned}$$

Man kann das Gleichungssystem so auffassen, daß am Rande  $A$  außer der Längskraft  $N_{\varphi n}$  solche Schubkräfte  $N_{\vartheta \varphi n}$  anzubringen sind, daß durch die gemeinsame Wirkung dieser beiden Lastgruppen am Rande  $B$  gerade die vorgeschriebenen Längskräfte  $N_{\varphi n}$  entstehen. Das ist natürlich nur dann möglich, wenn zur Schubbelastung des einen Randes eine Belastung des anderen gehört, die auch Längskräfte enthält. Da das zwar in der Regel aber nicht immer der Fall ist, gibt es Versager. Die Nennerdeterminante

$$\frac{b}{a} (\cos n \omega_A \sin n \omega_B - \cos n \omega_B \sin n \omega_A) = \frac{b}{a} \sin n (\omega_B - \omega_A)$$

der beiden Gleichungen kann nämlich null werden, wenn  $\omega_A - \omega_B$  zu  $\pi$  in einem rationalen Verhältnis steht:

$$\frac{\omega_A - \omega_B}{\pi} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Dann verschwindet  $\sin n (\omega_A - \omega_B)$  für  $n = m_2$  und alle ganzzahligen Vielfachen davon, also für unendlich viele Harmonische. Der Winkel  $\vartheta$  ändert sich dann beim Durchlaufen einer Charakteristik vom einen bis zum anderen Rande gerade um ein ganzzahliges Vielfaches von  $\frac{\pi}{n}$ , also des

Abstandes der Maxima und Minima der nach  $\cos n \vartheta$  verteilten äußeren Kräfte. D. h. daß die beiden Charakteristiken, die in irgendeinem Punkte des Randes  $B$  zusammenlaufen, von zwei Punkten des Randes  $A$  ausgehen, die zu derselben Phase der Verteilung  $\cos n \vartheta$  gehören, also Kräfte mitbringen, die sich wieder genau zu einer Meridiankraft zusammensetzen, wenn sie von Meridiankräften am unteren Rande herrühren, und zu einer Schubkraft, wenn am unteren Rande nur Schubkräfte angreifen. In diesem Falle ist es also unmöglich,  $S_n$  und  $T_n$  so zu bestimmen, daß an beiden Rändern willkürlich vorgeschriebene Meridianlängskräfte auftreten, sondern diese beiden müssen in einem durch die Geometrie der Schale bestimmten Verhältnis zueinander stehen.

Man kann diese Schwierigkeit zwar formal leicht umgehen, indem man die Schale so formt, daß  $\frac{\omega_A - \omega_B}{\pi}$  eine Irrationalzahl ist. Praktisch ist damit natürlich nichts gewonnen, denn in

einer solchen Schale wird die Nennerdeterminante zwar für keine Harmonische null, aber doch für manche sehr klein, und dann ergeben sich Werte  $S_n$  und  $T_n$ , die sehr groß gegenüber den gegebenen Randwerten der Meridiankräfte sind und dementsprechend sehr große Randschubkräfte zur Folge haben. Dieser Spannungszustand kann wohl auftreten, wenn man wirklich die vorgeschriebenen Meridiankräfte, die auch an einem Rande null sein können, aufbringt und der Schale an beiden



Rändern Gelegenheit gibt, die Schubkräfte in genau der richtigen Größe auf ihre Unterstützung abzusetzen. Besteht diese Unterstützung aber aus einem Ringträger, so kann man ihn zwar so ausbilden, daß er gegenüber den aus der Schale kommenden Schubkräften, die ihn in seiner eigenen Ebene verbiegen, sehr steif ist und doch sehr nachgiebig gegen Kräfte, die auf seiner Ebene senkrecht stehen. Da aber das Verhältnis der Steifigkeiten nie 1 : 0 sein kann, so wird der Ring es doch vorziehen, kleine zusätzliche Meridianlängskräfte aus der Schale aufzunehmen, wenn dadurch die Randschubkräfte wesentlich abgebaut werden können.

Um dieses Kräftespiel zwischen Schale und Ring weiter zu verfolgen, müßte man mindestens die Formänderungstheorie der Membranschale aufstellen, vielleicht sogar die vollständige Biegetheorie für nicht drehsymmetrisch verteilte Randbelastungen. Einfach kann diese nicht sein, denn in ihr müssen sich ja die sonderbaren Verhältnisse der Membrantheorie irgendwie auswirken. Hierauf einzugehen, sei einer späteren ausführlichen Untersuchung vorbehalten. Ziel dieses kurzen Beitrages soll es sein, die Probleme zu zeigen, die sich aus der negativen Krümmung der Schale ergeben, und für das einfachste Beispiel, das einschalige Hyperboloïd, die Membranlösung zu entwickeln.

Eingegangen am 8. 10. 1944.

## Asymptotische Integration der Störungsdifferentialgleichung ebener laminarer Störungen bei hohen Reynoldsschen Zahlen.\*)

Von W. Tollmien, z. Z. in Farnborough.

### 4. Fehlerabschätzung von $\varphi_2^*$ und $\varphi_1$ .

4.1 Definition und Eigenschaften von  $\varphi_2^*$ . Das asymptotische Näherungsintegral  $\varphi_2^*$  ist nach 1 Gl. (9) aus  $\mathfrak{P}_1$ ,  $\mathfrak{P}_2$  und  $\varphi_2^{(1)}$  aufgebaut. Um den Anschluß an frühere Untersuchungen<sup>10)</sup> zu bekommen, setzen wir

$$\varphi_2^{(1)} = 1 + \varepsilon \varphi_{21} \quad \dots \quad (1).$$

Nach 1 Gl. (8) und 3 Gl. (2) erhalten wir dann die Differentialgleichung für  $\varphi_{21}$ :

$$-i \frac{d^4 \varphi_{21}}{d\eta^4} = \eta \frac{d^2 \varphi_{21}}{d\eta^2} - \frac{U_0''}{U_0'} \quad \dots \quad (2).$$

Es läßt sich nun mittels Hankelscher Funktionen [vgl. die folgende Formel (8)] eine Lösung  $\frac{d^2 \varphi_{21}}{d\eta^2}$  von Gl. (2) herstellen, die in der unteren  $\eta$ -Halbebene sich für große  $|\eta|$  wie  $\frac{U_0''}{U_0'} \frac{1}{\eta}$  verhält<sup>10)</sup>.

Genauer gilt für große  $|\eta|$ :

$$\frac{d^2 \varphi_{21}}{d\eta^2} \sim \frac{U_0''}{U_0'} \left( \frac{1}{\eta} - \frac{2i}{\eta^4} \right) \quad \dots \quad (3),$$

so daß aus Gl. (2)

$$\frac{d^4 \varphi_{21}}{d\eta^4} \sim \frac{U_0''}{U_0'} \frac{2}{\eta} \quad \dots \quad (4)$$

und daraus durch Integration

$$\frac{d^3 \varphi_{21}}{d\eta^3} \sim -\frac{U_0''}{U_0'} \frac{1}{\eta^2} \quad \dots \quad (5)$$

folgt. Weiter kann man es einrichten, daß für große  $|\eta|$

$$\frac{d \varphi_{21}}{d\eta} \sim \frac{U_0''}{U_0'} (\log \eta + \log \varepsilon + 1) = \frac{U_0''}{U_0'} (\log y + 1) \quad \dots \quad (6)$$

und

$$\varphi_{21} \sim \frac{U_0''}{U_0'} \eta \log y \quad \dots \quad (7)$$

wird. Danach ist zu beachten, daß  $\varepsilon \varphi_{21}$  nicht klein mit  $\varepsilon$  wird, sobald  $|\eta|$  groß wird. Die Verbindung 1 Gl. (9)

$$\varphi_2^* = \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_1 (\varphi_2^{(1)} - 1) = \mathfrak{P}_2 + \varepsilon \varphi_{21} \mathfrak{P}_1$$

geht nun in der Tat bei kleinem  $|y|$  in

$$1 + \varepsilon \varphi_{21} = \varphi_2^{(1)}$$

\*) Fortsetzung des Aufsatzes aus Z. angew. Math. Mech. 25/27 (1947), Heft 2.

<sup>10)</sup> W. Tollmien: a. a. O. S. 27 bis 29. In der Anmerkung auf S. 29 findet sich ein Vorzeichenfehler, der oben in Gl. (3) berichtigt ist.



über, weil  $\mathfrak{P}_1$  und  $\mathfrak{P}_2$  dann nach 1 Gl. (6) und 1 Gl. (7) gleich 1 werden.  $\varphi_2^*$  hat auch die zweite in 1,2 geforderte Eigenschaft; denn für große  $|\eta|$  wird nach Gl. (7)

$$\varphi_2^* = \mathfrak{P}_2 + \frac{U''}{U_0} y \log y \mathfrak{P}_1,$$

was nach 1 Gl. (5) gleich  $\varphi_2$  ist.

Über die wichtige Funktion  $\varphi_{21}$  seien noch einige Angaben gemacht. Aus der Differentialgleichung (2) und dem Verhalten für große  $|\eta|$  folgt:

$$\frac{d^2 \varphi_{21}}{d\eta^2} = \frac{\pi}{6} \frac{U''}{U_0} \eta^{1/2} \left\{ H_{1/3}^{(2)} \int_{\infty}^{\eta} \eta^{1/2} H_{1/3}^{(1)} d\eta - H_{1/3}^{(1)} \int_{\infty}^{\eta} \eta^{1/2} H_{1/3}^{(2)} d\eta \right\} \quad \dots \quad (8),$$

wobei das Argument der Hankelschen Funktionen  $\frac{2}{3} (i\eta)^{3/2}$  ist. Diese Lösung wurde von mir 1929 qualitativ aufgezeichnet und in ihrem Verhalten bei großen  $|\eta|$  diskutiert. H. Schlichting

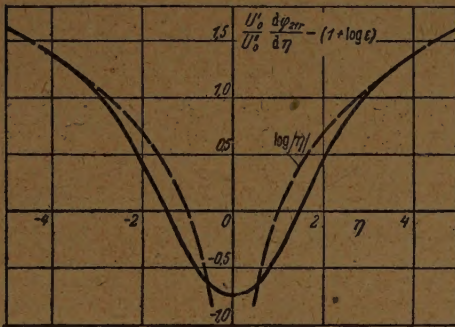
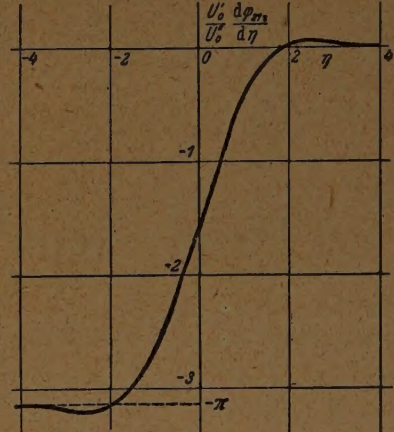


Bild 7. Realteil von  $\frac{U'_0}{U''_0} \frac{d\varphi_{21}}{d\eta} - (1 + \log \varepsilon)$  in Abhängigkeit von  $\eta$ .

Bild 8 (rechts).  
Imaginärteil von  
 $\frac{U'_0}{U''_0} \frac{d\varphi_{21}}{d\eta}$   
in Abhängigkeit von  $\eta$ .



ting<sup>11)</sup> hat die zweite und erste Ableitung von  $\varphi_{21}$  berechnet. Nach seiner Tabelle geben Bild 7 und 8 den Verlauf von  $\frac{d\varphi_{21}}{d\eta}$ .

4,2 Reste in der Differentialgleichung beim Einsetzen von  $\varphi_2^*$  und  $\varphi_1$ . Es soll nun der Rest  $g_2$  bestimmt werden, bis auf den  $\varphi_2^*$  die Störungsdifferentialgleichung befriedigt:

$$\varphi_2^{*''''} - i\alpha R \{ (U-c)(\varphi_2^{*''} - \alpha^2 \varphi_2^*) - U'' \varphi_2^* \} = g_2 \quad \dots \quad (9).$$

Dabei müssen die Differentialgleichungen für  $\mathfrak{P}_1$ ,  $\mathfrak{P}_2$  und  $\varphi_{21}$  berücksichtigt werden, die wir so schreiben:

$$L_1(\mathfrak{P}_1) \equiv (\mathfrak{P}_1'' - \alpha^2 \mathfrak{P}_1)(U-c) + 2 \frac{U-c}{y} \mathfrak{P}_1' - U'' \mathfrak{P}_1 = 0 \quad \dots \quad (10),$$

$$L_2(\mathfrak{P}_2) \equiv \left( \mathfrak{P}_2'' + 2 \frac{U''}{U_0} \mathfrak{P}_1' - \alpha^2 \mathfrak{P}_2 \right) (U-c) + \frac{U''}{U_0} \frac{U-c}{y} \mathfrak{P}_1 - U'' \mathfrak{P}_2 = 0 \quad \dots \quad (11),$$

$$L_{21}(\varphi_{21}) \equiv \varepsilon \varphi_{21}^{''''} - i\alpha R (U_0 \varepsilon y \varphi_{21}'' - U_0'') = 0 \quad \dots \quad (12).$$

Es ist zu bemerken, daß  $\frac{U-c}{y}$  bei  $y=0$  gleich  $U_0'$  wird. Indem zu Gl. (9)

$$i\alpha R L_2(\mathfrak{P}_2) + i\alpha R \varepsilon \varphi_{21} L_1(\mathfrak{P}_1) - \mathfrak{P}_1 L_{21}(\varphi_{21})$$

hinzugefügt wird, erhält man

$$\begin{aligned} g_2 = & 4\varepsilon \varphi_{21}'' \mathfrak{P}_1' + 6\varepsilon \varphi_{21}'' \mathfrak{P}_1'' + 4\varepsilon \varphi_{21}' \mathfrak{P}_1''' + \varepsilon \varphi_{21} \mathfrak{P}_1'''' + \mathfrak{P}_2'''' \\ & - i\alpha R \left\{ -2 \frac{U''}{U_0} \mathfrak{P}_1' (U-c) - \frac{U''}{U_0} \frac{U-c}{y} \mathfrak{P}_1 - 2 \frac{U-c}{y} \varepsilon \varphi_{21} \mathfrak{P}_1' \right. \\ & \left. + 2\varepsilon \varphi_{21}' \mathfrak{P}_1' (U-c) + (U-c-U_0' y) \varepsilon \varphi_{21}'' \mathfrak{P}_1 + U_0'' \mathfrak{P}_1 \right\}. \end{aligned}$$

Bei der Umordnung des Klammerausdruckes setzen wir

$$U-c-U_0' = y^2 u \quad \dots \quad (13),$$

<sup>11)</sup> H. Schlichting: Amplitudenverteilung und Energiebilanz der kleinen Störungen bei der Plattenströmung. Nachr. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Klasse, Fachgruppe I, Bd. 1, S. 47 bis 78, 1935. Vgl. besonders S. 57 ff. und Tabelle 5.



wobei die Entwicklung von  $u$  nach  $y$  mit  $\frac{U''}{2}$  beginnt. Der Ausdruck in der geschweiften Klammer wird damit

$$2 \frac{U-c}{y} \mathfrak{P}_1 \left( y \varepsilon \varphi'_{21} - \varepsilon \varphi_{21} - \frac{U''}{U'_0} y \right) + y u \mathfrak{P}_1 \left( \varepsilon y \varphi''_{21} - \frac{U''}{U'_0} \right) \dots \dots \dots (14).$$

Durch Integration von  $L_{21}(\varphi_{21})$  erhält man:

$$\varepsilon \varphi'''_{21} - i \alpha R(U'_0 y \varepsilon \varphi'_{21} - U'_0 \varepsilon \varphi_{21} - U''_0 y) = 0 \dots \dots \dots (15).$$

Die Integrationskonstante ist aus dem Verhalten bei sehr großem  $y$  bestimmt, wo  $\varphi'''_{21}$ ,  $\varphi'_{21}$  und  $\varphi_{21}$  nach Gl. (5), (6) und (7) bekannt sind. Die Beziehungen Gl. (15) und (12) werden zur Umformung von Gl. (14) benutzt. Man erhält dann:

$$g_2 = -\frac{y u}{U'_0} \varepsilon \varphi''''_{21} \mathfrak{P}_1 - 2 \frac{U-c}{U'_0 y} \varepsilon \varphi'''_{21} \mathfrak{P}_1 + 4 \varepsilon \varphi''_{21} \mathfrak{P}_1' + 6 \varepsilon \varphi'_{21} \mathfrak{P}_1'' + 4 \varepsilon \varphi_{21} \mathfrak{P}_1''' + \varepsilon \varphi_{21} \mathfrak{P}_1'''' + \mathfrak{P}_2''''.$$

Führt man  $\eta$  als Differentiationsvariable von  $\varphi_{21}$  ein, so bekommt man:

$$g_2 = \frac{1}{\varepsilon^2} \left( 2 \mathfrak{P}_1' \frac{d^3 \varphi_{21}}{d \eta^3} - \frac{u}{U'_0} \eta \mathfrak{P}_1 \frac{d^4 \varphi_{21}}{d \eta^4} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \left( 6 \mathfrak{P}_1' \frac{d^2 \varphi_{21}}{d \eta^2} - 2 \frac{u}{U'_0} \eta \mathfrak{P}_1' \frac{d^3 \varphi_{21}}{d \eta^3} \right) + 4 \mathfrak{P}_1'' \frac{d \varphi_{21}}{d \eta} + \varepsilon \varphi_{21} \mathfrak{P}_1'''' + \mathfrak{P}_2'''' \dots \dots (16).$$

Der Fehler, mit dem  $\varphi_1$  die Störungsdifferentialgleichung erfüllt, läßt sich sofort hinschreiben:

$$\varphi_1'''' - i \alpha R \{ (U-c) (\varphi_1'' - \alpha^2 \varphi_1) - U'' \varphi_1 \} = g_1 = \varphi_1'''' \dots \dots \dots (17).$$

**4.3 Abgekürzte Darstellungen von  $g_2$ ,  $\varphi_2^*$ ,  $\varphi_2^{*'}$  und  $\varphi_2^{*''}$ .** Für die Abschätzung benötigen wir noch einige abgekürzte Darstellungen von  $g_2$ ,  $\varphi_2^*$ ,  $\varphi_2^{*'}$  und  $\varphi_2^{*''}$ , die mittels der Ausdrücke für  $\varphi_{21}$  und seine Ableitungen bei großen  $|\eta|$  gewonnen werden. Aus Gl. (3), (4) und (5) ergibt sich sofort

$$\frac{d^2 \varphi_{21}}{d \eta^2} = \sigma_{-1}(\eta) s_2(\eta) \dots \dots \dots (18a),$$

$$\frac{d^3 \varphi_{21}}{d \eta^3} = \sigma_{-2}(\eta) s_3(\eta) \dots \dots \dots (18b),$$

$$\frac{d^4 \varphi_{21}}{d \eta^4} = \sigma_{-3}(\eta) s_4(\eta) \dots \dots \dots (18c),$$

wo  $s_2$ ,  $s_3$  und  $s_4$  beschränkte Funktionen sind. Zur Darstellung von  $\frac{d \varphi_{21}}{d \eta}$  bei beschränktem  $y$  führen wir die Funktion  $\tau$  ein:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= -\log \varepsilon && \text{für } |\eta| \leq 1, \\ \tau &= -\log \varepsilon - \log \eta && \text{für } 1 \leq |\eta| \leq \frac{1}{\varepsilon}, \\ \tau &= 0 && \text{für } |\eta| > \frac{1}{\varepsilon} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19).$$

Dann kann man nach Gl. (6)

$$\frac{d \varphi_{21}}{d \eta} = t_1(\eta) \tau(\eta) + t_2(\eta) \dots \dots \dots (20)$$

setzen, wo  $t_1$  und  $t_2$  beschränkte Funktionen sind. Schließlich sieht man an Gl. (7), daß  $\varepsilon \varphi_{21}$  bei endlichem  $y$  beschränkt bleibt, ohne indes mit  $\varepsilon$  klein zu werden, wie schon im Anschluß an Gl. (7) bemerkt wurde.

Damit ergibt sich für  $g_2$  die Darstellung:

$$g_2 = \frac{1}{\varepsilon^2} \sigma_{-2}(\eta) h_1 + \frac{1}{\varepsilon} \sigma_{-1}(\eta) h_2 + \tau(\eta) h_3 + h_4 \dots \dots \dots (21)$$

mit beschränkten Funktionen  $h_1 \dots h_4$ . Entsprechend erhalten wir

$$\varphi_2^* = \mathfrak{P}_2 + \varepsilon \varphi_{21} \mathfrak{P}_1 = q_1 \dots \dots \dots (22a),$$

$$\varphi_2^{*'} = \mathfrak{P}_2' + \frac{d \varphi_{21}}{d \eta} \mathfrak{P}_1 + \varepsilon \varphi_{21} \mathfrak{P}_1' = \tau q_2 + q_3 \dots \dots \dots (22b)$$

$$\varphi_2^{*''} = \mathfrak{P}_2'' + \frac{1}{\varepsilon} \frac{d^2 \varphi_{21}}{d \eta^2} \mathfrak{P}_1 + 2 \frac{d \varphi_{21}}{d \eta} \mathfrak{P}_1' + \varepsilon \varphi_{21} \mathfrak{P}_1'' = \frac{1}{\varepsilon} \sigma_{-1}(\eta) q_4 + \tau q_5 + q_6 \dots \dots \dots (22c)$$

mit den beschränkten Funktionen  $q_1 \dots q_6$ .



**4.4 Schema der Fehlerabschätzung.** Das Schema für die Fehlerabschätzung von  $\varphi_2^*$  und  $\varphi_1$  gewinnen wir durch eine abgewandelte Methode der Variation der Konstanten. Wir bezeichnen den Störungsdifferentialausdruck mit

$$L(\varphi) \equiv \varphi'''' - i\alpha R \{ (U - c) (\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U'' \varphi \} \dots \dots \dots (23).$$

In gewissem Sinne kennen wir schon zwei exakte Lösungen  $\varphi_{III}$  und  $\varphi_{IV}$  der Störungsdifferentialgleichung; denn wir kennen ihre Näherungen  $\varphi_3$  und  $\varphi_4$  einschließlich der Fehlerabschätzung. Aus den vermuteten Näherungen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2^*$  und den exakten Lösungen  $\varphi_{III}$  und  $\varphi_{IV}$  bilden wir ein „abgewandeltes“ Fundamentalsystem von Lösungen. Es gilt

$$L(\varphi_1) = g_1, \quad L(\varphi_2^*) = g_2, \quad L(\varphi_{III}) = 0, \quad L(\varphi_{IV}) = 0 \dots \dots \dots (24).$$

Für den Fehler  $\varphi_{II} - \varphi_2^*$  gilt

$$L(\varphi_{II} - \varphi_2^*) = L(\varphi_{II}) - L(\varphi_2^*) = -g_2 \dots \dots \dots (25).$$

Wir setzen den Fehler mit den variierten Konstanten  $c_1 \dots c_4$  an:

$$\varphi_{II} - \varphi_2^* = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2^* + c_3 \varphi_{III} + c_4 \varphi_{IV} \dots \dots \dots (26).$$

Wie üblich fordern wir

$$(\varphi_{II} - \varphi_2^*)' = c_1 \varphi_1' + c_2 \varphi_2^{*'} + c_3 \varphi_{III}' + c_4 \varphi_{IV}' \dots \dots \dots (27 a),$$

$$(\varphi_{II} - \varphi_2^*)'' = c_1 \varphi_1'' + c_2 \varphi_2^{*''} + c_3 \varphi_{III}'' + c_4 \varphi_{IV}'' \dots \dots \dots (27 b),$$

$$(\varphi_{II} - \varphi_2^*)''' = c_1 \varphi_1''' + c_2 \varphi_2^{*'''} + c_3 \varphi_{III}''' + c_4 \varphi_{IV}''' \dots \dots \dots (27 c).$$

Aus Gl. (27) und (25) folgen unter Berücksichtigung von Gl. (24) die Bestimmungsgleichungen für die ersten Ableitungen der variierten Konstanten:

$$\left. \begin{aligned} c_1' \varphi_1 + c_2' \varphi_2^* + c_3' \varphi_{III} + c_4' \varphi_{IV} &= 0, \\ c_1' \varphi_1' + c_2' \varphi_2^{*'} + c_3' \varphi_{III}' + c_4' \varphi_{IV}' &= 0, \\ c_1' \varphi_1'' + c_2' \varphi_2^{*''} + c_3' \varphi_{III}'' + c_4' \varphi_{IV}'' &= 0, \\ c_1' \varphi_1''' + c_2' \varphi_2^{*'''} + c_3' \varphi_{III}''' + c_4' \varphi_{IV}''' &= -g_2 - c_1 g_1 - c_2 g_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (28).$$

Nur die letzte Gleichung unterscheidet sich durch das Auftreten von  $c_1$  und  $c_2$  von den Gleichungen in der üblichen Methode der Variation der Konstanten. Wir setzen die Wronskische Determinante von  $\varphi_1, \varphi_2^*, \varphi_{III}$  und  $\varphi_{IV}$ :

$$W = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2^* & \varphi_{III} & \varphi_{IV} \\ \varphi_1' & \varphi_2^{*'} & \varphi_{III}' & \varphi_{IV}' \\ \varphi_1'' & \varphi_2^{*''} & \varphi_{III}'' & \varphi_{IV}'' \\ \varphi_1''' & \varphi_2^{*'''} & \varphi_{III}''' & \varphi_{IV}''' \end{vmatrix} \dots \dots \dots (29).$$

Ferner führen wir Abkürzungen für Unterdeterminanten der Wronskischen Determinante ein:

$$D_1 = \begin{vmatrix} \varphi_2^* & \varphi_{III} & \varphi_{IV} \\ \varphi_2^{*'} & \varphi_{III}' & \varphi_{IV}' \\ \varphi_2^{*''} & \varphi_{III}'' & \varphi_{IV}'' \end{vmatrix} \dots \dots \dots (30 a), \quad D_2 = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_{III} & \varphi_{IV} \\ \varphi_1' & \varphi_{III}' & \varphi_{IV}' \\ \varphi_1'' & \varphi_{III}'' & \varphi_{IV}'' \end{vmatrix} \dots \dots \dots (30 b),$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2^* & \varphi_{IV} \\ \varphi_1' & \varphi_2^{*'} & \varphi_{IV}' \\ \varphi_1'' & \varphi_2^{*''} & \varphi_{IV}'' \end{vmatrix} \dots \dots \dots (30 c), \quad D_4 = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2^* & \varphi_{III} \\ \varphi_1' & \varphi_2^{*'} & \varphi_{III}' \\ \varphi_1'' & \varphi_2^{*''} & \varphi_{III}'' \end{vmatrix} \dots \dots \dots (30 d).$$

Dann ist

$$c_1' = (g_2 + c_1 g_1 + c_2 g_2) \frac{D_1}{W} \dots \dots \dots (31 a),$$

$$c_2' = -(g_2 + c_1 g_1 + c_2 g_2) \frac{D_2}{W} \dots \dots \dots (31 b),$$

$$c_3' = (g_2 + c_1 g_1 + c_2 g_2) \frac{D_3}{W} \dots \dots \dots (31 c),$$

$$c_4' = -(g_2 + c_1 g_1 + c_2 g_2) \frac{D_4}{W} \dots \dots \dots (31 d).$$



Für die Wronskische Determinante leiten wir mit einer klassischen Schlußweise eine Differentialgleichung ab. Schreibt man formal

$$L(\varphi) \equiv \varphi'''' + a_1 \varphi''' + a_2 \varphi'' + a_3 \varphi' + a_4 \varphi,$$

so kann man die vier Beziehungen Gl. (24) als lineare Bestimmungsgleichungen für  $a_1 \dots a_4$  auffassen. Man erhält speziell

$$a_1 = -\frac{dW}{dy} - g_1 \frac{D_1}{W} + g_2 \frac{D_2}{W}.$$

Da  $a_1$  nach der Definition Gl. (23) von  $L$  verschwindet, so ist

$$\frac{dW}{dy} = -g_1 D_1 + g_2 D_2 \dots \dots \dots (32).$$

4,5 Darstellung der Determinanten  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  und  $D_4$  und Ausrechnung von  $W$ . Nach 3 Gl. (39), 3 Gl. (44), 3 Gl. (46) und (22) wird

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{\varepsilon^3} \sigma_{-1}(H) \frac{U'_0 Y}{U-c} q_1 [p_{III1} p_{IV2} - p_{IV1} p_{III2}] \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon^2} \sigma_{-3/2}(H) \left( \frac{U'_0 Y}{U-c} \right)^{3/2} (\tau q_2 + q_3) [p_{III} p_{IV2} - p_{IV} p_{III2}] \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \sigma_{-2}(H) \left( \frac{U'_0 Y}{U-c} \right)^2 \left[ \frac{1}{\varepsilon} \sigma_{-1}(\eta) q_4 + \tau q_5 + q_6 \right] [p_{III} p_{IV1} - p_{IV} p_{III1}] \end{aligned} \right\} \dots (33a).$$

Entsprechend wird, wenn man noch 1 Gl. (4) zu Hilfe nimmt,

$$\left. \begin{aligned} D_2 &= \frac{1}{\varepsilon^2} \sigma_{-1}(H) \frac{U'_0 Y}{U-c} \eta \mathfrak{P}_1 [p_{III1} p_{IV2} - p_{IV1} p_{III2}] \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon^2} \sigma_{-3/2}(H) \left( \frac{U'_0 Y}{U-c} \right)^{3/2} \varphi'_1 [p_{III} p_{IV2} - p_{IV} p_{III2}] \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \sigma_{-2}(H) \left( \frac{U'_0 Y}{U-c} \right)^2 \varphi'_1 [p_{III} p_{IV1} - p_{IV} p_{III1}] \end{aligned} \right\} \dots (34a).$$

Weiter wird

$$\left. \begin{aligned} D_3 &= \exp \left[ \frac{\sqrt{2}}{3} (1+i) H^{3/2} \right] \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2} \sigma_{-1/4}(H) \left( \frac{U'_0 Y}{U-c} \right)^{1/4} p_{IV2} [\varphi_1 (\tau q_2 + q_3) - \varphi'_1 q_1] \right. \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon} \sigma_{-3/4}(H) \left( \frac{U'_0 Y}{U-c} \right)^{3/4} p_{IV1} \left[ \varphi_1 \left( \frac{1}{\varepsilon} \sigma_{-1}(\eta) q_4 + \tau q_5 + q_6 \right) - \varphi'_1 q_1 \right] \\ &\quad \left. + \sigma_{-5/4}(H) \left( \frac{U'_0 Y}{U-c} \right)^{5/4} p_{IV} \left[ \varphi'_1 \left( \frac{1}{\varepsilon} \sigma_{-1}(\eta) q_4 + \tau q_5 + q_6 \right) - \varphi'_1 (\tau q_2 + q_3) \right] \right\} \dots (35a), \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} D_4 &= \exp \left[ -\frac{\sqrt{2}}{3} (1+i) H^{3/2} \right] \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2} \sigma_{-1/4}(H) \left( \frac{U'_0 Y}{U-c} \right)^{1/4} p_{III2} [\varphi_1 (\tau q_2 + q_3) - \varphi'_1 q_1] \right. \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon} \sigma_{-3/4}(H) \left( \frac{U'_0 Y}{U-c} \right)^{3/4} p_{III1} \left[ \varphi_1 \left( \frac{1}{\varepsilon} \sigma_{-1}(\eta) q_4 + \tau q_5 + q_6 \right) - \varphi'_1 q_1 \right] \\ &\quad \left. + \sigma_{-5/4}(H) \left( \frac{U'_0 Y}{U-c} \right)^{5/4} p_{III} \left[ \varphi'_1 \left( \frac{1}{\varepsilon} \sigma_{-1}(\eta) q_4 + \tau q_5 + q_6 \right) - \varphi'_1 (\tau q_2 + q_3) \right] \right\} \dots (36a). \end{aligned} \right\}$$

Diese Darstellungen wollen wir an Hand der Tatsache vereinfachen, daß wir die Abschätzung in dem endlichen  $y$ -Intervall  $y_w \dots 2 y_a$  vornehmen wollen. Dann ist

$$\mu |H| < |\eta| < \kappa |H|, \quad \mu > 0, \quad \kappa > 0,$$

und man kann in den erwähnten Darstellungen  $\sigma_n(\eta)$  durch  $\sigma_n(H)$  ersetzen. Überhöhen wir  $\tau$  durch die obere Schranke  $\log \frac{1}{\varepsilon}$ , so kommt man leicht zu den einfacheren Darstellungen

$$D_1 = \frac{1}{\varepsilon^3} \sigma_{-1}(H) \Delta_1(H) \dots \dots \dots (33),$$

$$D_2 = \frac{1}{\varepsilon^2} \Delta_2(H) \dots \dots \dots (34),$$



$$D_3 = \frac{1}{\varepsilon^2} \log \frac{1}{\varepsilon} \sigma_{-1/4}(H) \exp \left[ \frac{\sqrt{2}}{3} (1+i) H^{3/2} \right] \Delta_3(H) \quad (35),$$

$$D_4 = \frac{1}{\varepsilon^2} \log \frac{1}{\varepsilon} \sigma_{-1/4}(H) \exp \left[ -\frac{\sqrt{2}}{3} (1+i) H^{3/2} \right] \Delta_4(H) \quad (36),$$

wo die  $\Delta$  beschränkte Funktionen sind.

Die Wronskische Determinante  $W$  soll mittels der Differentialbeziehung Gl. (32) und eines Anfangswertes  $W_a$  bei  $y = y_a$  berechnet werden. Dort möge  $\varphi_2^*$  schon praktisch gleich  $\varphi_2$  sein, ebenso mögen die ersten Ableitungen übereinstimmen. Dies gilt nach Gl. (3) bis auf einen Fehler der Größenordnung  $\varepsilon^2$ , wenn bei  $y = y_a$

$$\eta^{-3} = O(\varepsilon^2)$$

ist, was durch die bereits gemachte Voraussetzung 3 Gl. (6) erfüllt wird. Unter der schwachen Bedingung 3 Gl. (6) können die höheren Ableitungen von  $\varphi_2^*$  bei  $y_a$  noch sehr groß werden,  $\varphi_2^{**}$  wie  $\varepsilon^{-1/3}$ ,  $\varphi_2^{***}$  wie  $\varepsilon^{-2/3}$ . Trotzdem kann man

$$W_a \approx \begin{vmatrix} \varphi_1 \varphi_2 \\ \varphi_1' \varphi_2' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_{III}'' \varphi_{IV}'' \\ \varphi_{III}''' \varphi_{IV}''' \end{vmatrix} \quad (37)$$

setzen. Während sich dieser Näherungswert sogleich als von der Größenordnung  $\varepsilon^{-5}$  herausstellen wird, so sind die vernachlässigten Glieder nur von der Größenordnung  $\varepsilon^{-4}$ , wie man leicht aus der Bemerkung über  $\varphi_2^{**}$ ,  $\varphi_2^{***}$  und aus den Darstellungen 3 Gl. (39), 3 Gl. (44) und 3 Gl. (46) für  $\varphi_{III}$ ,  $\varphi_{IV}$  und deren Ableitungen erkennt. Bei der Berechnung des Näherungswertes Gl. (37) gehen wir von der Beobachtung aus, daß die Wronskische Determinante von  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  nach der Differentialgleichung 1 Gl. (3) für  $y > 0$  konstant ist. Ihr Wert  $-1$  ergibt sich am leichtesten aus den Ansätzen 1 Gl. (4) und 1 Gl. (5) bei kleinem  $|y|$ . Unter Benutzung von 3 Gl. (33) an Stelle der zweiten Determinante in Gl. (37) ergibt sich

$$W_a \approx \frac{6i}{\pi \varepsilon^5} \quad (38).$$

Die Verwendung von 3 Gl. (33) bringt dabei Fehler mit sich, die höchstens von der Größenordnung  $\varepsilon^{-4}$  sind, wie man aus den abgeschätzten Fehlern von  $C$ ,  $\varphi_3''$ ,  $\varphi_3'''$ ,  $\varphi_4''$  und  $\varphi_4'''$  schließen kann.

Die Änderung von  $W$  im Intervall  $y_w \dots 2 y_a$  bestimmen wir durch Integration von Gl. (32). Diese Integration wollen wir mit der Integrationsvariablen  $H$  vornehmen, so daß

$$W = W_a - \varepsilon \int_{H_a}^H g_1 D_1 \sqrt{\frac{U_0' Y}{U - c}} dH + \varepsilon \int_{H_a}^H g_2 D_2 \sqrt{\frac{U_0' Y}{U - c}} dH \quad (39)$$

ist. Für  $g_2$ ,  $D_1$ ,  $D_2$  benutzen wir die Darstellungen Gl. (21), (33), (34). Die Abänderung von  $W$  gegenüber  $W_a$  ist dann nach Gl. (39) leicht als höchstens von der Größenordnung  $\varepsilon^{-3}$  abzuschätzen, so daß man

$$W = \frac{6i}{\pi \varepsilon^5} \quad (40)$$

setzen kann mit einem Fehler, der nach den Erwägungen bei der Aufstellung der Formel Gl. (38) für  $W_a$  höchstens von der Größenordnung  $\varepsilon^{-4}$  ist.

**4,6 Fehlerabschätzung von  $\varphi_2^*$  und  $\varphi_2^*$ .** Für die Fehlerabschätzung von  $\varphi_2^*$ , die wir im Intervall  $y_w \dots 2 y_a$  vornehmen wollen, müssen wir  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  und  $c_4$  nach Gl. (31) ermitteln.  $c_1$  und  $c_2$  nehmen wir aus Gl. (31a) und (31 b), indem wir als Anfangsbedingungen  $c_1 = c_2 = 0$  bei  $y = y_a$  vorschreiben. Die erste Näherung für  $c_1$  und  $c_2$  gewinnen wir aus den verkürzten Gleichungen:

$$c_1' \approx \frac{g_2 D_1}{W}, \quad c_2' \approx -\frac{g_2 D_2}{W} \quad (41).$$

Nach Gl. (21), (33), (34) und (40) erhält man, indem man sich die Integration wieder über  $H$  ausgeführt denkt:

$$c_1 = \varepsilon Q_1, \quad c_2 = \varepsilon^2 Q_2 \quad (42)$$

mit den beschränkten Funktionen  $Q_1$  und  $Q_2$ . Wenn man diese erste Näherung der Lösungen von Gl. (31 a) und (31 b) nach der üblichen Methode der sukzessiven Approximation verbessert, erkennt man, daß an dem Ergebnis Gl. (42) sich größenordnungsmäßig nichts ändert. Wir merken noch an, daß  $Q_1$  im Intervall  $y_a \dots 2 y_a$  mit  $\varepsilon^{4/3}$  klein wird. Dies läßt sich zeigen, wenn man



bei den Abschätzungen des Integrals, das man aus Gl. (41) für  $c_1$  bekommt, die  $\sigma_n$  unter der Bedingung 3 Gl. (6) nach ihrem definitionsgemäßen Verlauf berücksichtigt.

$c_3$  wird sodann aus Gl. (31 c) und (35) mit der Anfangsbedingung  $c_3 = 0$  bei  $y = y_w$  mittels der Formel 3 Gl. (28) abgeschätzt. Es ergibt sich

$$c_3 = \exp \left[ \frac{\sqrt{2}}{3} (1+i) H^{3/2} \right] \varepsilon^2 \log \frac{1}{\varepsilon} r_3 \dots \dots \dots (43).$$

Entsprechend wird aus Gl. (31 d) und (36) mit der Anfangsbedingung  $c_4 = 0$  bei  $y = 2 y_a$

$$c_4 = \exp \left[ -\frac{\sqrt{2}}{3} (1+i) H^{3/2} \right] \varepsilon^2 \log \frac{1}{\varepsilon} r_4 \dots \dots \dots (44).$$

$r_3$  und  $r_4$  sind beschränkte Funktionen von  $H$ .

Nach Verbindung von Gl. (43) mit 3 Gl. (39) und 3 Gl. (44), von Gl. (44) mit 3 Gl. (46) wird somit aus dem Fehleransatz Gl. (26):

$$\varphi_{II} - \varphi_2^* = \varepsilon Q_1 \varphi_1 + \varepsilon^2 Q_2 \varphi_2^* + \varepsilon^2 \log \frac{1}{\varepsilon} Q_3 \dots \dots \dots (45),$$

$$\varphi'_{II} - \varphi_2^{*'} = \varepsilon Q_1 \varphi'_1 + \varepsilon^2 Q_2 \varphi_2^{*'} + \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon} Q_4 \dots \dots \dots (46).$$

Alle  $Q$  sind beschränkt. Im Intervall  $y_a \dots 2 y_a$  werden, wie man aus einer ähnlich schon oben angedeuteten genaueren Abschätzung unter der Bedingung 3 Gl. (6) erkennt,  $Q_3$  wie  $\varepsilon^{8/3}$ ,  $Q_4$  wie  $\varepsilon^{7/3}$  klein.

**4,7 Fehlerabschätzung von  $\varphi_1$  und  $\varphi'_1$ .** Für den Fehler von  $\varphi_1$  machen wir, wie für den von  $\varphi_2^*$ , einen Ansatz mit variierten Konstanten:

$$\varphi_I - \varphi_1 = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2^* + c_3 \varphi_{III} + c_4 \varphi_{IV},$$

wobei in Analogie zu Gl. (31) sich jetzt für die variierten Konstanten die folgenden Gleichungen ergeben:

$$\left. \begin{aligned} c'_1 &= (g_1 + c_1 g_1 + c_2 g_2) \frac{D_1}{W}, \\ c'_2 &= -(g_1 + c_1 g_1 + c_2 g_2) \frac{D_2}{W}, \\ c'_3 &= (g_1 + c_1 g_1 + c_2 g_2) \frac{D_3}{W}, \\ c'_4 &= -(g_1 + c_1 g_1 + c_2 g_2) \frac{D_4}{W} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (47).$$

Den variierten Konstanten werden dieselben Anfangsbedingungen wie in 4,6 auferlegt. Es ergibt sich dann ganz entsprechend:

$$c_1 = \varepsilon^3 \log \frac{1}{\varepsilon} S_1 \dots \dots \dots (48), \quad c_2 = \varepsilon^3 S_2 \dots \dots \dots (49),$$

$$c_3 = \exp \left[ \frac{\sqrt{2}}{3} (1+i) H^{3/2} \right] \varepsilon^4 \log \frac{1}{\varepsilon} S_3 \dots \dots \dots (50),$$

$$c_4 = \exp \left[ -\frac{\sqrt{2}}{3} (1+i) H^{3/2} \right] \varepsilon^4 \log \frac{1}{\varepsilon} S_4 \dots \dots \dots (51).$$

Nach Verbindung von Gl. (50) mit 3 Gl. (39) und 3 Gl. (44), von Gl. (51) mit 3 Gl. (46) erhält man

$$\varphi_I - \varphi_1 = \varepsilon^3 \log \frac{1}{\varepsilon} S_1 \varphi_1 + \varepsilon^3 S_2 \varphi_2^* + \varepsilon^4 \log \frac{1}{\varepsilon} S_3 \dots \dots \dots (52),$$

$$\varphi'_I - \varphi'_1 = \varepsilon^3 \log \frac{1}{\varepsilon} S_1 \varphi'_1 + \varepsilon^3 S_2 \varphi_2^{*'} + \varepsilon^3 \log \frac{1}{\varepsilon} S_4 \dots \dots \dots (53).$$

Alle  $S$  sind beschränkt.



## 5. Zusammenstellung der Fehlerformeln für die vier Näherungsintegrale und ihre ersten Ableitungen.

Damit ist das Hauptziel dieser Abhandlung erreicht, und wir stellen die wichtigsten Fehlerformeln zusammen.

Nach 4 Gl. (52) und 4 Gl. (53) ist im Intervall  $y_w \dots 2 y_a$

$$\varphi_I - \varphi_1 = \varepsilon^3 \log \frac{1}{\varepsilon} S_1 \varphi_1 + \varepsilon^3 S_2 \varphi_1^* + \varepsilon^4 \log \frac{1}{\varepsilon} S_3 \dots \dots \dots (1),$$

$$\varphi_1' - \varphi_1' = \varepsilon^3 \log \frac{1}{\varepsilon} S_1 \varphi_1' + \varepsilon^3 S_2 \varphi_1^{*'} + \varepsilon^3 \log \frac{1}{\varepsilon} S_4 \dots \dots \dots (2),$$

wo  $S_1 \dots S_4$  beschränkte Funktionen sind,

Nach 4 Gl. (45) und 4 Gl. (46) ist in demselben Intervall

$$\varphi_{II} - \varphi_2^* = \varepsilon Q_1 \varphi_1 + \varepsilon^2 Q_2 \varphi_2^* + \varepsilon^2 \log \frac{1}{\varepsilon} Q_3 \dots \dots \dots (3),$$

$$\varphi_{II}' - \varphi_2^{*'} = \varepsilon Q_1 \varphi_1' + \varepsilon^2 Q_2 \varphi_2^{*'} + \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon} Q_4 \dots \dots \dots (4),$$

$Q_1 \dots Q_4$  sind beschränkte Funktionen. Speziell werden im Intervall  $y_a \dots 2 y_a$

$$Q_1 = O(\varepsilon^{4/3}), \quad Q_3 = O(\varepsilon^{8/3}), \quad Q_4 = O(\varepsilon^{7/3}) \dots \dots \dots (5),$$

falls dort nach 3 Gl. (6)

$$Y \geq \varepsilon^{1/3}$$

ist. Wie vor 4 Gl. (37) bemerkt wurde, ist dann in dem Intervall  $y_a \dots 2 y_a$

$$\varphi_2^* - \varphi_2 = O(\varepsilon^2) \dots \dots \dots (6),$$

$$\varphi_2^{*'} - \varphi_2' = O(\varepsilon^2) \dots \dots \dots (7).$$

Für  $\varphi_3$  und  $\varphi_3'$  benutzen wir nach 3 Gl. (27) und 3 Gl. (26) die Darstellungen:

$$\varphi_3 = \sigma_{-5/4}(H) \left( \frac{U_0' Y}{U - c} \right)^{5/4} \exp \left[ -\frac{\sqrt{2}}{3} (1+i) H^{3/2} \right] p_3(H) \dots \dots \dots (8),$$

$$\varphi_3' = \frac{1}{\varepsilon} \sigma_{-3/4}(H) \left( \frac{U_0' Y}{U - c} \right)^{3/4} \exp \left[ -\frac{\sqrt{2}}{3} (1+i) H^{3/2} \right] p_{31}(H) \dots \dots \dots (9).$$

Nach 3 Gl. (39) und 3 Gl. (44) hat man ferner die Darstellungen:

$$\varphi_{III} = \sigma_{-5/4}(H) \left( \frac{U_0' Y}{U - c} \right)^{5/4} \exp \left[ -\frac{\sqrt{2}}{3} (1+i) H^{3/2} \right] p_{III}(H) \dots \dots \dots (10),$$

$$\varphi_{III}' = \frac{1}{\varepsilon} \sigma_{-3/4}(H) \left( \frac{U_0' Y}{U - c} \right)^{3/4} \exp \left[ -\frac{\sqrt{2}}{3} (1+i) H^{3/2} \right] p_{III1}(H) \dots \dots \dots (11).$$

Im Intervall  $y_w \dots 2 y_a$  gilt dann nach 3 Gl. (43) und 3 Gl. (45a):

$$|p_{III} - p_3| \leq \frac{\varepsilon P_3 |p_3|_m}{1 - \varepsilon P_3} \dots \dots \dots (12),$$

$$|p_{III1} - p_{31}| \leq \frac{\varepsilon P_{31} |p_3|_m}{1 - \varepsilon P_3} \dots \dots \dots (13)$$

mit zwei von  $\varepsilon$  unabhängigen Konstanten  $P_3$  und  $P_{31}$ .

Entsprechend hat man nach 3 Gl. (29), 3 Gl. (30) und 3 Gl. (46) die Darstellungen:

$$\varphi_4 = \sigma_{-5/4}(H) \left( \frac{U_0' Y}{U - c} \right)^{5/4} \exp \left[ \frac{\sqrt{2}}{3} (1+i) H^{3/2} \right] p_4(H) \dots \dots \dots (14),$$

$$\varphi_4' = \frac{1}{\varepsilon} \sigma_{-3/4}(H) \left( \frac{U_0' Y}{U - c} \right)^{3/4} \exp \left[ \frac{\sqrt{2}}{3} (1+i) H^{3/2} \right] p_{41}(H) \dots \dots \dots (15),$$

$$\varphi_{IV} = \sigma_{-5/4}(H) \left( \frac{U_0' Y}{U - c} \right)^{5/4} \exp \left[ \frac{\sqrt{2}}{3} (1+i) H^{3/2} \right] p_{IV}(H) \dots \dots \dots (16),$$

$$p_{IV}' = \frac{1}{\varepsilon} \sigma_{-3/4}(H) \left( \frac{U_0' Y}{U - c} \right)^{3/4} \exp \left[ \frac{\sqrt{2}}{3} (1+i) H^{3/2} \right] p_{IV1}(H) \dots \dots \dots (17).$$



Nach 3 Gl. (47) ist im Intervall  $y_w \dots 2 y_a$

$$|p_{IV} - p_4| \leq \frac{\varepsilon P_4 |p_4|_m}{1 - \varepsilon P_4} \dots \dots \dots (18),$$

$$|p_{IV1} - p_{41}| \leq \frac{\varepsilon P_{41} |p_4|_m}{1 - \varepsilon P_4} \dots \dots \dots (19)$$

mit zwei von  $\varepsilon$  unabhängigen Konstanten  $P_4$  und  $P_{41}$ .

## 6. Über ein Randwertproblem.

**6,1 Randbedingung bei  $y = \infty$ .** Bei Grenzsichtprofilen  $U(y)$  wird gewöhnlich verlangt, daß  $\varphi$  bei großen Wandabständen abklingt, also bei  $y = \infty$  stark verschwindet. Aus diesem Grunde kann in der gesuchten linearen Verbindung der vier asymptotischen Integrale  $\varphi_{IV}$  nicht vorkommen, worauf wir schon in 3,3 im Anschluß an die Formel 3 Gl. (51) hinwiesen. Um die Erfüllung der Randbedingung bei  $y = \infty$  vorzubereiten, stellen wir die vier asymptotischen Integrale im Intervall  $y_a \dots 2 y_a$  auf.

**6,2 Darstellung der asymptotischen Integrale im Intervall  $y_a \dots 2 y_a$ .** Im Intervall  $y_a \dots 2 y_a$  ist nach 5 Gl. (1)

$$\varphi_I = \varphi_1 + O\left(\varepsilon^3 \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \dots \dots \dots (1).$$

$\varphi_1$  genügt der reibungslosen Störungsdifferentialgleichung 1 Gl. (3), läßt sich also in dem bezeichneten Intervall aus  $\varphi_{s1}$  und  $\varphi_{s2}$ , die dort ein Fundamentalsystem von 1 Gl. (2) bilden, zusammensetzen:

$$\varphi_1 = \gamma_{11} \varphi_{s1} + \gamma_{12} \varphi_{s2} \dots \dots \dots (2),$$

wo  $\gamma_{11}$  und  $\gamma_{12}$  Konstante sind. Nach 1,3 muß  $\varphi_I$  in dem Intervall  $y_a \dots 2 y_a$  durch eine lineare Verbindung von  $\varphi_{s1}$ ,  $\varphi_{s2}$ ,  $\varphi_{s3}$  und  $\varphi_{s4}$  darstellbar sein. Da diese vier Funktionen ganz verschiedene Wachstumseigenschaften in dem Intervall haben, so muß jedes der vier Korrekturglieder, die nach Gl. (1) zu  $\varphi_1$  hinzugefügt werden müssen, um  $\varphi_I$  zu bekommen, in dem g a n z e n Intervall wie  $\varepsilon^3 \log \frac{1}{\varepsilon}$  klein werden<sup>12)</sup>. Also erhält man die Darstellung

$$\varphi_I = \gamma_{11} \varphi_{s1} + \gamma_{12} \varphi_{s2} + \log \frac{1}{\varepsilon} \left( \varepsilon_{11}^3 \varphi_{s1} + \varepsilon_{12}^3 \varphi_{s2} + \varepsilon_{13}^3 \varphi_{s3} + \varepsilon_{14}^3 \frac{\varphi_{s4}}{\varphi_{s4}} \right) \dots \dots \dots (3).$$

Dabei sind  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{12}$ ,  $\varepsilon_{13}$  und  $\varepsilon_{14}$  Konstante, die mindestens mit  $\varepsilon$  klein werden. Der Nenner  $\overline{\varphi_{s4}}$  soll den Wert von  $\varphi_{s4}$  in der Mitte des Intervalls, also bei  $\frac{3}{2} y_a$  bedeuten. Er mußte wegen des überaus raschen Wachstums von  $\varphi_{s4}$  hinzugefügt werden.

Nach 5 Gl. (3), 5 Gl. (5) und 5 Gl. (6) ist im Gebiet  $y_a \dots 2 y_a$

$$\varphi_{II} = \varphi_2 + O(\varepsilon^2) \dots \dots \dots (4).$$

Genau so wie oben können wir mit zwei Konstanten  $\gamma_{21}$  und  $\gamma_{22}$

$$\varphi_2 = \gamma_{21} \varphi_{s1} + \gamma_{22} \varphi_{s2} \dots \dots \dots (5)$$

setzen. Schließlich ergibt sich

$$\varphi_{II} = \gamma_{21} \varphi_{s1} + \gamma_{22} \varphi_{s2} + \varepsilon_{21}^2 \varphi_{s1} + \varepsilon_{22}^2 \varphi_{s2} + \varepsilon_{23}^2 \varphi_{s3} + \varepsilon_{24}^2 \frac{\varphi_{s4}}{\varphi_{s4}} \dots \dots \dots (6).$$

wo die Konstanten  $\varepsilon_{21}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{23}$  und  $\varepsilon_{24}$  höchstens die Größenordnung  $\varepsilon$  haben.

Nach 5 Gl. (8), 5 Gl. (10) und 5 Gl. (12) ist im Intervall  $y_a \dots 2 y_a$ :

$$\varphi_{III} = \varphi_3 + \sigma_{-5/4}(H) \left( \frac{U_0 Y}{U - c} \right)^{5/4} \exp \left[ -\frac{\sqrt{2}}{3} (1+i) H^{3/2} \right] O(\varepsilon) \dots \dots \dots (7).$$

Dafür kann man nach 3 Gl. (8) schreiben:

$$\varphi_{III} = \varphi_3 + d_3 \varphi_{s3} O(\varepsilon) \dots \dots \dots (8),$$

Nach 3 Gl. (9) ist

$$\varphi_3 = d_3 \varphi_{s3} [1 + O(\varepsilon)] \dots \dots \dots (9).$$

Also ist

$$\varphi_{III} = d_3 \varphi_{s3} [1 + O(\varepsilon)] \dots \dots \dots (10).$$

<sup>12)</sup> Umständlicher kann man diesen Schluß begründen, indem man das Korrekturglied  $O\left(\varepsilon^3 \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$  von (1) durch eine lineare Verbindung von  $\varphi_{s1}$ ,  $\varphi_{s2}$ ,  $\varphi_{s3}$  und  $\varphi_{s4}$  in vier Punkten des Intervalls  $y_a \dots 2 y_a$  ersetzt denkt. Dann hat man das lineare Gleichungssystem für die vier Konstanten der linearen Verbindung zu diskutieren.



Dies führt zu der Darstellung:

$$\varphi_{III} = d_3 \left[ \varphi_{s3} (1 + \varepsilon_{33}) + \varepsilon_{31} \overline{\varphi_{s3}} \varphi_{s1} + \varepsilon_{32} \overline{\varphi_{s3}} \varphi_{s2} + \varepsilon_{34} \frac{\overline{\varphi_{s3}}}{\varphi_{s4}} \varphi_{s4} \right] \dots \dots \dots (11).$$

$\overline{\varphi_{s3}}$  ist der Wert von  $\varphi_{s3}$  bei  $\frac{3}{2} y_a$ ;  $\varepsilon_{31}$ ,  $\varepsilon_{32}$ ,  $\varepsilon_{33}$  und  $\varepsilon_{34}$  sind Konstante, die mindestens wie  $\varepsilon$  klein werden.

Nach 5 Gl. (16) ist im ganzen untersuchten Intervall  $y_w \dots 2 y_a$

$$\varphi_{IV} = \sigma_{-5/4}(H) \left( \frac{U_0 Y}{U - c} \right)^{5/4} \exp \left[ \frac{\sqrt{2}}{3} (1 + i) H^{3/2} \right] p_{IV}(H)$$

mit beschränktem  $p_{IV}$ . Daraus ergibt sich für  $y_a \leq y \leq 2 y_a$ :

$$\varphi_{IV} = \varepsilon^{5/4} \left( \frac{U_0}{U_m - c} \right)^{5/4} \exp \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + i) \sqrt{a R} \int_0^{y_a} \sqrt{U - c} dy \right] \varphi_{s4} p_{IV}(H) \dots \dots \dots (12).$$

Dafür kann man nach 3 Gl. (51) schreiben:

$$\varphi_{IV} = \sqrt{\frac{\pi}{3}} e^{\frac{11}{24} i \pi} e_4 \varphi_{s4} p_{IV} \dots \dots \dots (13).$$

Will man eine Darstellung von  $\varphi_{IV}$  als lineare Verbindung von  $\varphi_{s1}$ ,  $\varphi_{s2}$ ,  $\varphi_{s3}$  und  $\varphi_{s4}$ , so hat man schon in  $e_4$  nach 3 Gl. (50) und 3 Gl. (51) den Faktor von  $\varphi_{s4}$  bis auf einen relativen Fehler der Größenordnung  $\varepsilon$ . Da  $p_{IV}$  beschränkt bleibt, so können nach Gl. (13) die Bestandteile mit  $\varphi_{s1}$ ,  $\varphi_{s2}$  und  $\varphi_{s3}$  nur die Größenordnung  $e_4 \overline{\varphi_{s4}}$  haben. Also kommt man im Intervall  $y_a \dots 2 y_a$  zu der Darstellung:

$$\varphi_{IV} = e_4 \left[ \varphi_{s4} (1 + \varepsilon_{44}) + a_1 \overline{\varphi_{s4}} \varphi_{s1} + a_2 \overline{\varphi_{s4}} \varphi_{s2} + a_3 \frac{\overline{\varphi_{s4}}}{\varphi_{s3}} \varphi_{s3} \right] \dots \dots \dots (14),$$

wo die Konstante  $\varepsilon_{44}$  mit  $\varepsilon$  klein wird, während die Konstanten  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_3$  bei beliebig abnehmendem  $\varepsilon$  beschränkt bleiben.

**6,3 Korrektur von  $\varphi_{III}$  zugunsten der Randbedingung bei  $y = \infty$ .** Der Randbedingung bei  $y = \infty$  wird  $\varphi_{III}$  beinahe gerecht, da nach Gl. (11) sein hauptsächlichster Bestandteil das abklingende  $\varphi_{s3}$  ist. Die hinderlichen nicht abklingenden Bestandteile mit  $\varphi_{s2}$  und  $\varphi_{s4}$  wollen wir nun beseitigen, indem wir eine Korrektur

$$\Delta \varphi_{III} = \delta_{32} \varphi_{II} + \delta_{34} \varphi_{IV} \dots \dots \dots (15)$$

von  $\varphi_{III}$  abziehen. Dies führt nach Gl. (11), (6) und (14) zu den beiden Gleichungen für die Konstanten  $\delta_{32}$  und  $\delta_{34}$ :

$$d_3 \varepsilon_{32} \overline{\varphi_{s3}} = \delta_{32} (\gamma_{22} + \varepsilon_{22}^2) + \delta_{34} e_4 a_2 \overline{\varphi_{s4}} \dots \dots \dots (16a),$$

$$d_3 \varepsilon_{34} \frac{\overline{\varphi_{s3}}}{\varphi_{s4}} = \delta_{32} \frac{\varepsilon_{24}^2}{\varphi_{s4}} + \delta_{34} e_4 (1 + \varepsilon_{44}) \dots \dots \dots (16b).$$

Man erhält

$$\delta_{32} \approx \frac{d_3 \overline{\varphi_{s4}} (\varepsilon_{32} - \varepsilon_{34} a_2)}{\gamma_{22}} \dots \dots \dots (17a),$$

$$\delta_{34} \approx \frac{d_3 \overline{\varphi_{s3}}}{e_4 \overline{\varphi_{s4}}} \left( \varepsilon_{34} - \frac{\varepsilon_{32} \cdot \varepsilon_{24}^2}{\gamma_{22}} \right) \dots \dots \dots (17b).$$

Falls  $\gamma_{22}$  etwa 0 sein sollte, was in den Beispielen allerdings niemals der Fall ist, so hätte man  $\delta_{31} \varphi_I$  an Stelle von  $\delta_{33} \varphi_{II}$  zum Aufbau von  $\Delta \varphi_{III}$  zu wählen.

$\varphi_{III} - \Delta \varphi_{III}$  wird im Intervall  $y_a \dots 2 y_a$  gemäß seiner Erzeugung proportional zu einer linearen Verbindung von  $\varphi_{s3}$  und  $\varphi_{s1}$ , so daß diese exakte Lösung  $\varphi_{III} - \Delta \varphi_{III}$  über  $y_a$  hinaus durch eine im Unendlichen abklingende Lösung fortgesetzt wird. Im Intervall  $y_w \dots y_a$  wird dagegen  $\Delta \varphi_{III}$  mit  $d_3 \overline{\varphi_{s3}} \varepsilon$  klein, wie aus Gl. (17) folgt.  $d_3$  wird unter der Bedingung 3 Gl. (6) wie

$(a R)^{-5/12} \exp \left[ -\frac{\sqrt{2}}{3} \frac{1}{\varepsilon} \right]$  klein.  $\Delta \varphi'_{III}$  wird im Intervall  $y_w \dots y_a$  wie  $d_3 \overline{\varphi_{s3}} \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon}$  klein. Dem-

nach ist es im Intervall  $y_w \dots y_a$  für die Fehlerabschätzung von  $\varphi_3$  und  $\varphi'_3$  belanglos, ob man von der exakten Lösung  $\varphi_{III}$  oder von der korrigierten exakten Lösung  $\varphi_{III} - \Delta \varphi_{III}$  ausgeht, die im Unendlichen abklingt.



6,4 Zusammensetzung und Korrektur von  $\varphi_I$  und  $\varphi_{II}$ , um Abklingen bei  $y = \infty$  zu erzielen. Aus  $\varphi_I$  und  $\varphi_{II}$  soll eine lineäre Verbindung

$$C_1 \varphi_I + C_2 \varphi_{II} \quad (18)$$

gebildet werden, die im wesentlichen einer abklingenden Lösung entspricht. Die nicht abklingenden Bestandteile sollen dann durch eine Korrektur an  $\varphi_I$  und  $\varphi_{II}$  beseitigt werden.

Denkt man sich  $\varphi_I$  im Intervall  $y_a \dots 2 y_a$  durch  $\varphi_1$ ,  $\varphi_{II}$  durch  $\varphi_2$  angenähert, so wird

$$C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 \approx C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 = C_1 (\gamma_{11} \varphi_{s1} + \gamma_{12} \varphi_{s2}) + C_2 (\gamma_{21} \varphi_{s1} + \gamma_{22} \varphi_{s2}) \quad (19).$$

Setzt man abkürzend bei  $y = y_a$ :

$$\varphi_{1a} + \alpha \varphi_{1a} = \Phi_{1a} \quad (20 a),$$

$$\varphi'_{2a} + \alpha \varphi_{2a} = \Phi_{2a} \quad (20 b)$$

und nimmt dort als Randbedingung

$$C_1 \Phi_{1a} + C_2 \Phi_{2a} = 0 \quad (21),$$

so ist dies gleichbedeutend mit

$$C_1 \gamma_{12} + C_2 \gamma_{22} = 0 \quad (22).$$

Danach bleiben in der Verbindung Gl. (18) an Bestandteilen, die nicht für  $y = \infty$  nach 0 gehen, noch übrig:

$$C_1 \log \frac{1}{\varepsilon} \left( \varepsilon_{12}^3 \varphi_{s2} + \frac{\varepsilon_{14}^3 \varphi_{s4}}{\varphi_{s4}} \right) + C_2 \left( \varepsilon_{22}^2 \varphi_{s2} + \frac{\varepsilon_{24}^2 \varphi_{s4}}{\varphi_{s4}} \right) \quad (23),$$

wie man aus Gl. (3) und (6) erkennt. Von  $\varphi_I$  soll

$$\Delta \varphi_I = \delta_{12} \varphi_{II} + \delta_{14} \varphi_{IV} \quad (24)$$

und von  $\varphi_{II}$  soll

$$\Delta \varphi_{II} = \delta_{22} \varphi_{II} + \delta_{24} \varphi_{IV} \quad (25)$$

abgezogen werden, so daß die nicht abklingenden Glieder Gl. (23) ausgemerzt werden. Diese Forderung führt nach Gl. (6) und (14) zu den Gleichungen:

$$\log \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon_{12}^3 = \delta_{12} (\gamma_{12} + \varepsilon_{22}^2) + \delta_{14} e_4 a_2 \overline{\varphi_{s4}} \quad (26 a),$$

$$\log \frac{1}{\varepsilon} \frac{\varepsilon_{14}^3}{\varphi_{s4}} = \delta_{12} \frac{\varepsilon_{24}^2}{\varphi_{s4}} + \delta_{14} e_4 (1 + \varepsilon_{44}) \quad (26 b),$$

$$\varepsilon_{22}^2 = \delta_{22} (\gamma_{22} + \varepsilon_{22}^2) + \delta_{24} e_4 a_2 \overline{\varphi_{s4}} \quad (27 a),$$

$$\frac{\varepsilon_{24}^2}{\varphi_{s4}} = \delta_{22} \frac{\varepsilon_{24}^2}{\varphi_{s4}} + \delta_{24} e_4 (1 + \varepsilon_{44}) \quad (27 b).$$

Aus Gl. (26) erhält man

$$\delta_{12} \approx \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\gamma_{22}} (\varepsilon_{12}^3 - a_2 \varepsilon_{14}^3) \quad (28 a),$$

$$\delta_{14} \approx \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{e_4 \gamma_{22} \varphi_{s4}} (\gamma_{22} \varepsilon_{14}^3 - e_{18}^3 \varepsilon_{24}^2) \quad (28 b).$$

Im Intervall  $y_w \dots y_a$  unterscheidet sich danach  $\varphi_I - \Delta \varphi_I$  von  $\varphi_I$  bis auf einen beschränkten Faktor um  $\varepsilon^3 \log \frac{1}{\varepsilon} \varphi_2^*$ ,  $\varphi_I - \Delta \varphi_I$  von  $\varphi_I$  entsprechend um  $\varepsilon^3 \log \frac{1}{\varepsilon} \varphi_2^*$ . Daher ändert sich an der Fehlerabschätzung von  $\varphi_1$  und  $\varphi_1'$  nichts Wesentliches, ob man nun  $\varphi_I$  oder  $\varphi_I - \Delta \varphi_I$  als exakte Lösung zuordnet. Aus Gl. (27) erhält man

$$\delta_{22} \approx \frac{\varepsilon_{22}^2 - a_2 \varepsilon_{24}^2}{\gamma_{22}} \quad (29 a),$$

$$\delta_{24} \approx \frac{\gamma_{22} \varepsilon_{24}^2 - \varepsilon_{22}^2 \varepsilon_{24}}{e_4 \gamma_{22} \varphi_{s4}} \quad (29 b).$$

Im Intervall  $y_w \dots y_a$  unterscheidet sich demnach  $\varphi_{II} - \Delta \varphi_{II}$  von  $\varphi_{II}$  bis auf einen beschränkten Faktor um  $\varepsilon^2 \varphi_2^*$ , entsprechend  $\varphi_{II}' - \Delta \varphi_{II}'$  von  $\varphi_{II}'$  um  $\varepsilon^2 \varphi_2^*$ , so daß sich durch die Korrektur von  $\varphi_{II}$  wieder nichts Wesentliches an der Fehlerabschätzung von  $\varphi_2^*$  und  $\varphi_2^{*'} \varphi_2^*$  ändert.



**6,5 Randbedingung an der Wand.** Nachdem erkannt ist, daß  $\varphi_{III}$  und  $C_1 \varphi_I + C_2 \varphi_{II}$  durch Korrekturen, die im Intervall  $y_w \dots y_a$  nichts ausmachen, zur vollen Befriedigung der Randbedingung bei  $y = \infty$  gebracht werden können, bleiben nur die Randbedingungen an der Wand ( $y = y_w$ ) noch zu erfüllen. Dort muß  $\varphi = \varphi' = 0$  sein, da beide Störungskomponenten an der Wand verschwinden müssen. Also ist bei  $y = y_w$

$$C_1 \varphi_{Iw} + C_2 \varphi_{IIw} + C_3 \varphi_{IIIw} = 0 \quad \dots \dots \dots (30a),$$

$$C_1 \varphi'_{Iw} + C_2 \varphi'_{IIw} + C_3 \varphi'_{IIIw} = 0 \quad \dots \dots \dots (30b)$$

zu fordern, wozu die schon aufgestellte Randbedingung Gl. (21)

$$C_1 \Phi_{1a} + C_2 \Phi_{2a} = 0 \quad \dots \dots \dots (30c)$$

tritt. Aus den Gl. (30) folgt

$$\frac{\varphi_{IIIw}}{\varphi_{IIIw}} (\Phi_{1a} \varphi'_{IIw} - \Phi_{2a} \varphi'_{Iw}) = \Phi_{1a} \varphi_{IIw} - \Phi_{2a} \varphi_{Iw} \quad \dots \dots \dots (31).$$

Diese komplexe Gleichung gibt den Zusammenhang zwischen den drei Parametern  $R$ ,  $\alpha$ ,  $c$  bzw.  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ ,  $c$ . Sie soll unter Vernachlässigung von Gliedern, die stärker als  $\varepsilon$  verschwinden, angenähert werden, indem  $\varphi_I$ ,  $\varphi_{II}$  und  $\varphi_{III}$  durch ihre Näherungen ersetzt werden. Im Rahmen des gewünschten Näherungsgrades wird nach 5 Gl. (1), 5 Gl. (2), 5 Gl. (3) und 5 Gl. (4):

$$\frac{\varphi_{IIIw}}{\varphi'_{IIIw}} \approx \varepsilon \frac{\varphi_{3w}}{\left(\frac{d\varphi_3}{d\eta}\right)_w} \quad \dots \dots \dots (32),$$

$$\varphi_{Iw} \approx \varphi_{1w}, \quad \varphi'_{Iw} \approx \varphi'_{1w} \quad \dots \dots \dots (33)$$

$$\varphi_{IIw} \approx \varphi_{2w}^* + \varepsilon Q_{1w} \varphi_{1w}, \quad \varphi'_{IIw} \approx \varphi_{2w}^{*'} + \varepsilon Q_{1w} \varphi'_{1w} \quad \dots \dots \dots (34)$$

Damit wird aus Gl. (31)

$$\varepsilon \left(\frac{d\varphi_3}{d\eta}\right)_w (\Phi_{1a} \varphi_{2w}^{*'} - \Phi_{2a} \varphi'_{1w} + \varepsilon \Phi_{1a} Q_{1w} \varphi'_{1w}) = \Phi_{1a} \varphi_{2w}^* - \Phi_{2a} \varphi_{1w} + \varepsilon \Phi_{1a} Q_{1w} \varphi_{1w} \quad \dots \dots (35).$$

Die Diskussion von Gl. (35) beschränken wir auf Profile ohne Wendepunkt ( $U'' \leq 0$ ). Dann stellt sich heraus, daß die Parameter  $c$  und  $\alpha$  bei  $R \rightarrow \infty$  bzw.  $\varepsilon \rightarrow 0$  so miteinander gekoppelt sind, daß  $\Phi_{1a}$  und  $\varphi_{1w}$  nach 0 gehen. Dies geht erstens aus den zahlenmäßig durchgeführten Stabilitätsuntersuchungen hervor. Zweitens wird dies durch einen Satz nahegelegt, den ich bei vollständiger Reibungslosigkeit ( $\varepsilon = 0$ ) bewiesen habe<sup>13)</sup>, wonach bei Profilen ohne Wendepunkt das gesuchte  $\varphi$  gleich  $\varphi_1$  sein muß, was das Verschwinden von  $\Phi_{1a}$  und  $\varphi_{1w}$  fordert. Daher geht in Gl. (35) das letzte Glied  $\varepsilon \Phi_{1a} Q_{1w} \varphi_{1w}$  stärker als  $\varepsilon$  nach 0. Wir können also mit dem gewünschten Näherungsgrad die Gleichung für die Bestimmung der Parameter so schreiben:

$$\varepsilon \left(\frac{d\varphi_3}{d\eta}\right)_w (\Phi_{1a} \varphi_{2w}^{*'} - \Phi_{2a} \varphi'_{1w}) = \Phi_{1a} \varphi_{2w}^* - \Phi_{2a} \varphi_{1w} \quad \dots \dots \dots (36).$$

Näher soll auf das Randwertproblem in dieser Abhandlung nicht eingegangen werden.

## 7. Die Störungsdifferentialgleichung bei Grenzschichtprofilen.

Es war eingangs in 1.1 erwähnt worden, daß  $U$  im allgemeinen keineswegs genau eine Funktion von  $y$  allein ist, wie wir doch bei der Störungsdifferentialgleichung annahmen. Schon 1929 (a. a. O. S. 40) hatte ich indessen andeutungsweise darauf hingewiesen, daß bei Grenzschichtprofilen der Einfluß von  $x$  auf die Grundgeschwindigkeit die Störungsdifferentialgleichung nicht wesentlich abändert. Diese älteren Überlegungen sollen jetzt in erneuerter und verbesserter Form wiedergegeben werden<sup>14)</sup>.

Die Grenzschichtströmung, deren Stabilität untersucht werden soll, habe die Stromfunktion  $\Psi(x, y)$ ;  $x$  sei die Bogenlänge der beströmten Wand, und  $y$  sei normal zur Wand. Mit  $\psi(x, y, t)$  werde die Stromfunktion der Störung bezeichnet. Wenn der Einfluß der Krümmung der Koordinatenlinien vernachlässigt werden kann, was wir in Analogie zum Vorgehen in der

<sup>13)</sup> W. Tollmien: Ein allgemeines Kriterium der Instabilität laminarer Geschwindigkeitsverteilungen. Nachr. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Klass., Fachgruppe I, Bd. 1, S. 80–114, 1935. Vgl. besonders § 5 und § 7.

<sup>14)</sup> Zu dieser Darstellung wurde ich durch eine Anfrage von Herrn G. Hamel vom 24.3.1943 angeregt. Wesentliche Teile meines Antwortbriefes werden oben benutzt.



Grenzschichttheorie einmal ohne Diskussion hinnehmen wollen, so gilt für die gesamte Stromfunktion  $\bar{\psi} = \Psi + \psi$  die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \Delta \bar{\psi}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \frac{\partial \Delta \bar{\psi}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \frac{\partial \Delta \bar{\psi}}{\partial y} = \nu \Delta \Delta \bar{\psi} \quad \dots \quad (1)$$

$\nu$  ist die kinematische Zähigkeit. Glieder, die quadratisch in der Stromfunktion der Störung sind, sollen vernachlässigt werden. Dann ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial y} - \nu \Delta \Delta \Psi \\ & + \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial y} - \nu \Delta \Delta \psi = 0 \end{aligned} \right\} \dots \quad (2).$$

Die erste Zeile, die sich allein auf die Grundströmung bezieht, verschwindet für sich. Die zweite Zeile liefert die Störungsdifferentialgleichung. Bis hierher ist noch alles allgemein gültig für ebene Strömungen ohne merklichen Einfluß der Wandkrümmung.

Jetzt sei daran erinnert, daß bei Grenzschichtströmungen  $\Psi$  weit stärker von  $y$  als von  $x$  abhängt. Entsprechend wird die Störungsstromfunktion  $\psi$  hauptsächlich durch die Veränderlichkeit der Grundströmung mit  $y$ , weit weniger durch die mit  $x$  beeinflußt. Diese qualitativen Aussagen sollen nun formelmäßig gefaßt und in die allgemeine Störungsdifferentialgleichung

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial y} = \nu \Delta \Delta \psi \quad \dots \quad (3)$$

einbezogen werden.

Es werden Dimensionslose eingeführt. Die Geschwindigkeiten werden auf eine charakteristische Geschwindigkeit  $\bar{U}$  der  $x$ -Komponente der Grundströmung bezogen, wobei man etwa die Geschwindigkeit nehmen kann, mit der der ruhende Körper vom Unendlichen aus angeströmt wird. Soweit es sich um die Störungsstromfunktion handelt, machen wir alle Längen durch eine charakteristische Querabmessung der Grundgeschwindigkeitsprofile dimensionslos, die mit der Grenzschichtdicke vergleichbar ist. Die nähere Definition dieser Bezugslänge  $b$  schieben wir auf. Auf diese Weise hat man für die Dimensionslosen mit dem Index 1:

$$x = x_1 b, \quad y = y_1 b, \quad t = t_1 \frac{b}{\bar{U}}, \quad \psi = \bar{U} b \psi_1(x_1, y_1, t_1) \quad \dots \quad (4).$$

Bei der Grundströmung beziehen wir dagegen gemäß der Grenzschichttheorie  $x$  auf eine charakteristische Abmessung  $l$  des umströmten Körpers (z. B. Radius beim Kreiszylinder), während  $y$  wieder auf  $b$  bezogen wird. Für  $b$ , das eine charakteristische Querabmessung der Grenzschicht sein soll, kann man dann etwa wählen:

$$b = \frac{l}{\sqrt{\frac{\bar{U} l}{\nu}}} \quad \dots \quad (5).$$

Die anderen möglichen Festsetzungen von  $b$  unterscheiden sich von dieser nur um einen konstanten Zahlenfaktor. Es werden also die Dimensionslosen mit dem Index 2 eingeführt durch:

$$x = x_2 l, \quad y = y_2 b = y_1 b, \quad \Psi = \bar{U} b \Psi_2(x_2, y_2) \quad \dots \quad (6).$$

Dann gilt der grundlegende Ähnlichkeitssatz für Grenzschichten, daß  $\Psi_2(x_2, y_2)$  von der Reynoldsschen Zahl unabhängig ist. Für  $\psi_1(x_1, y_1, t_1)$  gilt natürlich nichts Entsprechendes.

Werden diese Dimensionslosen in die allgemeine Störungsgleichung (3) eingeführt, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial \Delta_1 \psi_1}{\partial t_1} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_2} \frac{\partial \Delta_1 \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} \left[ \frac{b^3}{l^3} \frac{\partial^3 \Psi_2}{\partial x_2^3} + \frac{b}{l} \frac{\partial^3 \Psi_2}{\partial x_2 \partial y_2^2} \right] - \frac{b}{l} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} \frac{\partial \Delta_1 \psi_1}{\partial y_1} \\ & - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \left[ \frac{\partial^3 \Psi_2}{\partial y_2^3} + \frac{b^2}{l^2} \frac{\partial^3 \Psi_2}{\partial x_2^2 \partial y_2} \right] = \frac{\nu}{\bar{U} b} \Delta_1 \Delta_1 \psi_1 \end{aligned} \right\} \dots \quad (7)$$

mit

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}.$$

Umgeordnet wird daraus mit  $\frac{b}{l} = \frac{\nu}{\bar{U} b}$ :

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial \Delta_1 \psi_1}{\partial t_1} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_2} \frac{\partial \Delta_1 \psi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \frac{\partial^3 \Psi_2}{\partial y_2^3} = \frac{\nu}{\bar{U} b} \left\{ \Delta_1 \Delta_1 \psi_1 + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} \frac{\partial \Delta_1 \psi_1}{\partial y_1} \right. \\ & \left. - \frac{\partial^3 \Psi_2}{\partial x_2 \partial y_2^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} + \frac{\nu}{\bar{U} b} \frac{\partial^3 \Psi_2}{\partial x_2^2 \partial y_2} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} - \frac{\nu^2}{\bar{U}^2 b^2} \frac{\partial^3 \Psi_2}{\partial x_2^3} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} \right\} \dots \quad (8). \end{aligned} \right\}$$



Berücksichtigt man, daß alle Ableitungen von  $\Psi_2$  nach  $x_2$  und  $y_2$  nach dem angeführten Ähnlichkeitssatz für Grenschichten von der Reynoldsschen Zahl unabhängig und beschränkt bleiben, so sieht man, daß durch die Veränderlichkeit von  $U$  mit  $x$  scheinbare Reibungsglieder in der Störungsdifferentialgleichung hinzugekommen sind, wie schon 1929 bemerkt wurde. Wenn man nur die höchsten Reibungsglieder berücksichtigt, entsprechend dem asymptotischen Charakter der ganzen Stabilitätsrechnung für große Reynoldssche Zahlen so erhält man in dimensionslosen Variablen, die mit  $\bar{U}$  und  $\bar{b}$  gebildet wurden:

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + U \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{R} \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \quad (9).$$

Ableitungen von  $U$  nach  $x$  treten nicht mehr auf. Wenn man den Störungsvorgang jeweils über  $x$ -Intervalle verfolgt, deren Größe mit  $b$  vergleichbar bleibt, zum mindesten weit kleiner als  $l$  ist, das ja für die Änderungen von  $U$  mit  $x$  das Maß angibt, so kann man  $U$  als Funktion von  $y$  allein betrachten. Für  $\psi$  ist dann ein Ansatz von Partialschwingungen möglich, der auf die grundlegende Störungsdifferentialgleichung 1 Gl. (2) führt.

Eingegangen am 20. 5. 1944.

## Über die Differentialgleichung der transversalen Stabschwingungen.

Herrn Prof. Dr. L. Prandtl zum 70. Geburtstag.

Von F. Pfeiffer in Stuttgart.

*Es werden für die — die Querkraft und die Rotationsträgheit berücksichtigende — lineare partielle Differentialgleichung 4. Ordnung der transversalen Stabschwingungen die Differentialgleichungen der Charakteristiken aufgestellt.*

*Für die numerische Behandlung der Differentialgleichung erfolgt die Aufstellung der Charakteristiken für ein mit ihr äquivalentes System von zwei partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung und die Einführung der die Charakteristiken gebenden Variablen als neue unabhängige Veränderliche.*

*Es wird die Fortpflanzung von Unstetigkeiten im Moment und in der Querkraft mit Hilfe der Charakteristikengleichungen beurteilt.*

*Are set up the differential equations of the characteristics concerned instead of the linear partial differential equation of the 4th order of the transversal beam vibrations taking into consideration the transverse force and the rotational inertia.*

*With regard to the numerical method of the differential equation the setting up of the characteristics will be made by means of a system equivalent to the equation concerned of two particular partial differential equations of the 2nd order and by introducing the variables involving the characteristics as a new and absolute arbitrary inconstant.*

*The transmission of inconstancies in momentum and in the transverse force is gauged on the strength of the characteristics equations.*

*Sont posées les équations différentielles des caractéristiques en question au lieu de l'équation différentielle partielle et linéaire de la 4<sup>e</sup> ordre des vibrations transversales de bâton, prenant en considération la force transversale et l'inertie de rotation.*

*Par rapport à la méthode numérique de l'équation différentielle les caractéristiques sont posées au moyen d'un système équivalent à l'équation en question, c'est à dire de deux équations différentielles partielles de la 2<sup>e</sup> ordre et en introduisant des valeurs variables involvant les caractéristiques comme variable nouvelle et indépendante.*

*La propagation des inconstances au moment et dans la force transversale est réalisée au moyen des équations de caractéristiques.*

*Для линейного частичного уравнения 4-го разряда поперечных штабных колебаний, принимающего во внимание поперечную силу и вращательную инерцию, устанавливаются дифференциальные уравнения характеристик.*

*Для численного обсуждения дифференциального уравнения производится установление характеристик для эквивалентной с ней системы двух частичных дифференциальных уравнений 2-го разряда и введение переменных величин, придающих характеристикам новое независимое изменение.*

*Распространение (размножение) перерывов в моменте и в поперечной силе устанавливается при помощи характеристик-уравнений.*

Herr W. Flügge hat in dieser Zeitschrift, Bd. 22 (1942) in einem Aufsatz über „Die Ausbreitung von Biegungswellen in Stäben“ die wohl zuerst von S. Timoshenko<sup>1)</sup> angegebene vollständige Differentialgleichung für die Transversalschwingungen eines Stabes

$$E k^2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \rho k^2 \left( 1 + \frac{E}{A G} \right) \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\rho^2 k^2}{A G} \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 0 \quad (1)$$

<sup>1)</sup> S. Timoshenko: Phil. Mag. Bd. 41 (1921), S. 744—746; ebenda Bd. 43 (1922), S. 125—131.



benützt, um die endliche Fortschrittgsgeschwindigkeit von Biegungswellen im Stab darzutun und Aussagen über die Fortpflanzung von Sprüngen im Moment und in der Querkraft zu machen. Die Auflösung dieser Differentialgleichung sollte nicht Aufgabe seiner Abhandlung sein.

In dem vorliegenden Aufsatz sollen einige Hinweise gegeben werden, wie man in vorgegebenen Einzelfällen diese Differentialgleichung mit Hilfe ihrer Charakteristiken numerisch behandeln kann.

In der obigen Differentialgleichung ist angenommen, daß sich der Stab in der  $x$ -Richtung erstreckt,  $y$  ist die Zeit,  $z(x, y)$  die in der Biegungsebene senkrecht zur  $x$ -Achse gerichtete Ausbiegung,  $\rho$  ist die Dichte des Stabes,  $q$  die Fläche des Querschnitts,  $k$  der Trägheitsradius des Querschnitts für eine zur Biegungsebene senkrechte, durch den Schwerpunkt des Querschnitts gehende Achse,  $E$  der Elastizitätsmodul,  $G$  der Schubmodul und  $\Lambda$  eine Konstante, die von der Gestalt des Querschnitts abhängt. Später werden noch die Querkraft  $Q$  und das Biegemoment  $M$ , auf die sich die im Querschnitt angreifenden Kräfte reduzieren, und die Drehung  $\Phi$  des Stabelements um die zur Biegungsebene senkrechte Achse durch den Schwerpunkt des Querschnitts eingeführt.  $\rho, E, G, q$  und  $k$  seien konstant vorausgesetzt.

1. Setzt man

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= p, & \frac{\partial z}{\partial y} &= q, & \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= r, & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= s, & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= t \\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} &= \alpha, & \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} &= \beta, & \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} &= \gamma, & \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} &= \delta \\ \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} &= \tau_1, & \frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} &= \tau_2, & \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} &= \tau_3, & \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} &= \tau_4, & \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} &= \tau_5 \end{aligned}$$

und führt die Abkürzungen ein

$$Ek^2 = a, \quad \rho k^2 \left(1 + \frac{E}{\Lambda G}\right) = b, \quad \frac{\rho^2 k^2}{\Lambda G} = c, \quad \rho = f,$$

so wird die Differentialgleichung (1)

$$a\tau_1 - b\tau_3 + c\tau_5 + ft = 0 \quad (2)$$

Sie ist eine lineare homogene Differentialgleichung 4. Ordnung und bildet mit den Gleichungen

$$d\alpha = \tau_1 dx + \tau_2 dy, \quad d\beta = \tau_2 dx + \tau_3 dy, \quad d\gamma = \tau_3 dx + \tau_4 dy, \quad d\delta = \tau_4 dx + \tau_5 dy$$

ein System von fünf linearen Gleichungen für die Größen  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5$ . Nullsetzen der Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} a & 0 & -b & 0 & c & -ft \\ dx & dy & 0 & 0 & 0 & d\alpha \\ 0 & dx & dy & 0 & 0 & d\beta \\ 0 & 0 & dx & dy & 0 & d\gamma \\ 0 & 0 & 0 & dx & dy & d\delta \end{vmatrix}$$

liefert für die Charakteristiken<sup>2)</sup> von Gl. (2) die Hauptgleichung

$$a dy^4 - b dx^2 dy^2 + c dx^4 = 0 \quad (3)$$

und die Nebengleichung

$$a dx^2 (d\alpha dx - d\beta dy) + (a dy^2 - b dx^2) (d\gamma dx - d\delta dy) + ft dx^4 = 0 \quad (4)$$

Aus Gl. (3) ergeben sich die 4 Werte für  $\frac{dy}{dx}$ :

$$\kappa_1 = \sqrt{\frac{\rho}{E}}, \quad \kappa_2 = -\sqrt{\frac{\rho}{E}}, \quad \kappa_3 = \sqrt{\frac{\rho}{\Lambda G}}, \quad \kappa_4 = -\sqrt{\frac{\rho}{\Lambda G}},$$

und mit der Bezeichnung  $\kappa$  für einen dieser Werte wird Gl. (4):

$$a \left( \frac{d\alpha}{dx} - \kappa \frac{d\beta}{dx} \right) + (a\kappa^2 - b) \left( \frac{d\gamma}{dx} - \kappa \frac{d\delta}{dx} \right) + ft = 0 \quad (4')$$

Man hat also für dasjenige der 4 Charakteristikensysteme „3. Ordnung“, das zum Wert  $\kappa$  gehört, die 8 Gleichungen:

<sup>2)</sup> Siehe etwa R. Courant und D. Hilbert: Methoden der math. Physik, Bd. 2 (Berlin 1937), 5. Kap.



$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \kappa \\ \frac{dz}{dx} &= p + q\kappa, \quad \frac{dp}{dx} = v + s\kappa, \quad \frac{dq}{dx} = s + t\kappa \\ \frac{dr}{dx} &= \alpha + \beta\kappa, \quad \frac{ds}{dx} = \beta + \gamma\kappa, \quad \frac{dt}{dx} = \gamma + \delta\kappa \\ a \left( \frac{d\alpha}{dx} - \kappa \frac{d\beta}{dx} \right) + (a\kappa^2 - b) \left( \frac{d\gamma}{dx} - \kappa \frac{d\delta}{dx} \right) + ft &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

für die 11 Funktionen  $y, z, p, q, r, s, t, \alpha, \beta, \gamma, \delta$  von  $x$ .

Man kann die 4 Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen nebeneinander angenähert integrieren in der Art, die Massau<sup>3)</sup> für partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung und Systeme von partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung angegeben hat. Ich setze das Näherungsverfahren hier nicht auseinander; sein Grundgedanke tritt auch in Abschnitt 3 hervor, und die numerische Durchführung wird dort ganz wesentlich einfacher.

2. Wir legen statt der Differentialgleichung (1) das System der beiden Differentialgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \varrho \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \Lambda G \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \Lambda G \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \varrho k^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= \Lambda G \frac{\partial z}{\partial x} - \Lambda G \Phi + E k^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

zugrunde, aus denen durch Elimination von  $\Phi$  die Gl. (1) folgt. Sie ergeben sich aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \varrho q \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{und} \quad \varrho q k^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = Q + \frac{\partial M}{\partial x} \\ M &= E q k^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{und} \quad Q = \Lambda G q \left( \frac{\partial z}{\partial x} - \Phi \right) \end{aligned}$$

durch Elimination von  $M$  und  $Q$ <sup>4)</sup>. Setzt man

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \bar{p}_1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \bar{q}_1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \bar{p}_2, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \bar{q}_2 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \bar{r}_1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \bar{s}_1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \bar{t}_1, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \bar{r}_2, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \bar{s}_2, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \bar{t}_2, \end{aligned}$$

so wird Gl. (6)

$$\left. \begin{aligned} \varrho \bar{t}_1 - \Lambda G \bar{r}_1 &= -\Lambda G \bar{p}_2 \\ \varrho k^2 \bar{t}_2 - E k^2 \bar{r}_2 &= \Lambda G \bar{p}_1 - \Lambda G \Phi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6')$$

Die Gl. (6') bilden mit den „Streifenbedingungen“

$$\bar{d}p_1 = \bar{r}_1 dx + \bar{s}_1 dy, \quad \bar{d}q_1 = \bar{s}_1 dx + \bar{t}_1 dy, \quad \bar{d}p_2 = \bar{r}_2 dx + \bar{s}_2 dy, \quad \bar{d}q_2 = \bar{s}_2 dx + \bar{t}_2 dy \dots (7)$$

ein System von sechs linearen Gleichungen für  $\bar{r}_1, \bar{s}_1, \bar{t}_1, \bar{r}_2, \bar{s}_2, \bar{t}_2$ . Durch Nullsetzen der Determinanten der Matrix

$$\left\| \begin{array}{cccccc} -\Lambda G & 0 & \varrho & 0 & 0 & 0 & -\Lambda G \bar{p}_2 \\ 0 & 0 & 0 & -E k^2 & 0 & \varrho k^2 & \Lambda G (\bar{p}_1 - \Phi) \\ dx & dy & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{d}p_1 \\ 0 & dx & dy & 0 & 0 & 0 & \bar{d}q_1 \\ 0 & 0 & 0 & dx & dy & 0 & \bar{d}p_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & dx & dy & \bar{d}q_2 \end{array} \right\|$$

ergeben sich die gewöhnlichen Differentialgleichungen für die Charakteristiken des Systems Gl. (6). Mit den Abkürzungen

$$\sqrt{\frac{\Lambda G}{\varrho}} = c_1, \quad \sqrt{\frac{E}{\varrho}} = c_2, \quad 4 E q k^2 = \frac{1}{A} \dots \dots \dots (8)$$

<sup>3)</sup> J. Massau: Mémoire sur l'intégration graphique des équations aux dérivées partielles. Gand 1900, Chap. I u. II. Siehe auch Encyclopädie der Math. Wiss., II C 2, Artikel Runge-Willers, S. 161–164.

<sup>4)</sup> Siehe Handbuch der Physik (Springer), Bd. VI, S. 359. Dort muß in der zweiten Gleichung Zeile 15 die linke Seite heißen:  $\varrho q k^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$ .



werden diese Differentialgleichungen für die 4 Systeme von Charakteristiken

	Hauptgleichung	Nebengleichung
I.	$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{c_1}$	$-\frac{d\bar{p}_1}{dx} - \frac{1}{c_1} \frac{d\bar{q}_1}{dx} + 4AM = 0 \dots (9a),$
II.	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{c_1}$	$-\frac{d\bar{p}_1}{dx} + \frac{1}{c_1} \frac{d\bar{q}_1}{dx} + 4AM = 0 \dots (9b),$
III.	$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{c_2}$	$\frac{d\bar{p}_2}{dx} + \frac{1}{c_2} \frac{d\bar{q}_2}{dx} + 4AQ = 0 \dots (9c),$
IV.	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{c_2}$	$\frac{d\bar{p}_2}{dx} - \frac{1}{c_2} \frac{d\bar{q}_2}{dx} + 4AQ = 0 \dots (9d).$

Die Projektionen der vier Charakteristikensysteme in die  $x, y$ -Ebene sind die Geradenscharen

$$\text{I. } x + c_1 y = \lambda_1 \quad \text{II. } x - c_1 y = \lambda_2 \quad \text{III. } x + c_2 y = \lambda_3 \quad \text{IV. } x - c_2 y = \lambda_4 \quad \dots (10).$$

Man hat in den Differentialgleichungen I (9a) zusammen mit  $\frac{dz}{dx} = \bar{p}_1 + \bar{q}_1 \frac{dy}{dx}$  drei Differentialgleichungen für die vier Funktionen  $y, z, \bar{p}_1, \bar{q}_1$  von  $x$ , und Analoges gilt für die Differentialgleichungen II, III, IV. Wegen des Auftretens von  $M$ , oder also  $\bar{p}_2$ , in Gl. (9a) und (9b) und von  $Q$ , oder also  $\bar{p}_1$ , in Gl. (9c) und (9d) bilden die Differentialgleichungen (9a—d) ein simultanes System. In der von Massau angegebenen Art kann man diese Systeme nebeneinander näherungsweise integrieren.

3. Es empfiehlt sich aber für die numerische Rechnung noch die folgende Vereinfachung.

Wir führen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  als neue unabhängige Veränderliche in die erste Differentialgleichung (6) ein. Damit wird diese Differentialgleichung zu

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_2} \right) \dots (11a).$$

Weiter führen wir  $\lambda_3$  und  $\lambda_4$  als neue unabhängige Veränderliche in die zweite Differentialgleichung (6) ein und erhalten

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda_3 \partial \lambda_4} = -\frac{c_1^2}{4k^2 c_2^2} \left( \frac{\partial z}{\partial \lambda_3} + \frac{\partial z}{\partial \lambda_4} - \Phi \right) \dots (11b).$$

Die Benützung der zwei Paare von unabhängigen Veränderlichen in den Gl. (11a) und (11b), nämlich  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  in Gl. (11a) und  $\lambda_3$  und  $\lambda_4$  in Gl. (11b) bewirkt, daß beide Gleichungen die einfache Form, die nur die gemischte zweite Ableitung enthält, annehmen. Der Übergang von den Variablen  $\lambda_1, \lambda_2$  auf  $\lambda_3, \lambda_4$  ist nach Gl. (10) sehr einfach:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= \lambda_3 + \lambda_4 \\ c_2 (\lambda_1 - \lambda_2) &= c_1 (\lambda_3 - \lambda_4) \end{aligned} \right\} \dots (12).$$

Führt man ein

$$\left. \begin{aligned} M &= E q k^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{4A} (p_2 + q_2) \\ Q &= A G q \left( \frac{\partial z}{\partial x} - \Phi \right) = A G q (p_1 + q_1 - \Phi) \end{aligned} \right\} \dots (13),$$

so werden die Gl. (11a) und (11b):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} = AM \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda_3 \partial \lambda_4} = -AQ \dots (13a), (13b).$$

Wir behandeln die Differentialgleichung (13a) wieder mit dem Charakteristikenverfahren. Setzt man

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda_1} = p_1, \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda_2} = q_1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \lambda_1^2} = r_1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} = s_1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \lambda_2^2} = t_1,$$

so wird Gl. (13a)

$$s_1 = AM$$

und bildet mit

$$dp_1 = r_1 d\lambda_1 + s_1 d\lambda_2 \quad \text{und} \quad dq_1 = s_1 d\lambda_1 + t_1 d\lambda_2$$



ein System von drei linearen Gleichungen für  $r_1, s_1, t_1$ .

Aus der Matrix

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & AM \\ d\lambda_1 & d\lambda_2 & 0 & dp_1 \\ 0 & d\lambda_1 & d\lambda_2 & dq_1 \end{vmatrix}$$

gewinnt man für die Charakteristiken

der Schar I

$$\left. \begin{array}{l} \text{die Hauptgleichung} \dots \dots \lambda_1 = \text{const.} \\ \text{die Nebengleichung} \dots \dots dp_1 = AM d\lambda_2 \\ \text{wofür die Streifenbedingung tritt} \dots dz = q_1 d\lambda_2 \end{array} \right\} (14a),$$

der Schar II

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_2 = \text{const.} \\ dq_1 = AM d\lambda_1 \\ dz = p_1 d\lambda_1 \end{array} \right\} (14b).$$

Ganz analog erhält man zu Gl. (13b), wenn man setzt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_3} = p_2, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_4} = q_2, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda_3^2} = r_2, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda_3 \partial \lambda_4} = s_2, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda_4^2} = t_2$$

für die Charakteristiken

der Schar III

$$\left. \begin{array}{l} \text{die Hauptgleichung} \dots \dots \lambda_3 = \text{const.} \\ \text{die Nebengleichung} \dots \dots dp_2 = -AQ d\lambda_4 \\ \text{wofür die Streifenbedingung tritt} \dots d\Phi = q_2 d\lambda_4 \end{array} \right\} (14c),$$

der Schar IV

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_4 = \text{const.} \\ dq_2 = -AQ d\lambda_3 \\ d\Phi = p_2 d\lambda_3 \end{array} \right\} (14d).$$

Für jede Schar von Charakteristiken hat man in ihren beiden letzten Gleichungen zwei Gleichungen für drei unbekannte Funktionen, z. B. bei der Schar I zwei Gleichungen für  $z, p_1, q_1$  als Funktionen von  $x$ .

Weiter ist noch zu beachten, daß in den Gleichungen für die Scharen I und II das  $M$ , oder also  $p_2 + q_2$  [wegen Gl. (13)], auftritt, das durch Integration der Differentialgleichungen (14c) und (14d) gewonnen werden muß, und daß in den Gleichungen für die Scharen III und IV das  $Q$ , oder also  $p_1 + q_1$ , auftritt, das durch Integration der Differentialgleichungen (14a) und (14b) gewonnen werden muß. Zur angenäherten Integration der Charakteristikengleichungen in der Art des Massauschen Verfahrens muß man also die den vier Systemen [Gl. (14a—d)] entsprechenden Differenzgleichungen nebeneinander heranziehen.

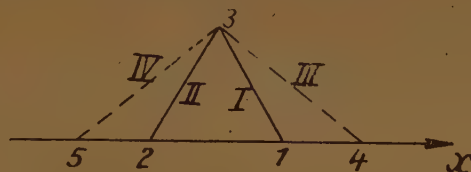


Bild 1.

Seien etwa die Werte von  $z, p_1, q_1; \Phi, p_2, q_2$  in den Punkten der  $x$ -Achse gegeben. Dann geht man (Bild 1) vom Punkt 1 der  $x$ -Achse auf der Charakteristik I ( $\lambda_1 = \text{const.}$ ) der Schar I und von dem (hinreichend nahe bei 1 gelegenen) Punkt 2 der  $x$ -Achse auf der Charakteristik II ( $\lambda_2 = \text{const.}$ ) der Schar II weiter bis zum Schnittpunkt 3 dieser beiden Charakteristiken und berechnet  $p_1^3, q_1^3, z^3$  (die oberen Indizes geben, da Verwechslungen mit Potenzen ausgeschlossen sind, die Nummer des Punktes) in Punkt 3 mit Hilfe der den Gl. (14a) und (14b) entsprechenden Differenzgleichungen

$$\left. \begin{array}{l} p_1^3 - p_1^1 = AM^1 (\lambda_2^3 - \lambda_2^1) \\ z^3 - z^1 = q_1^1 (\lambda_2^3 - \lambda_2^1) \end{array} \right\} \text{ nach Gl. (14a),} \quad \left. \begin{array}{l} q_1^3 - q_1^2 = AM^2 (\lambda_1^3 - \lambda_1^2) \\ z^3 - z^2 = p_1^2 (\lambda_1^3 - \lambda_1^2) \end{array} \right\} \text{ nach Gl. (14b).}$$

Daraus erhält man  $p_1^3$  und  $q_1^3$ , ferner doppelt den Wert von  $z^3$ , wobei die beiden Werte  $z^3$  innerhalb der geforderten Genauigkeitsschranken übereinstimmen müssen, sonst muß 2 näher an 1 gewählt werden.

Durch 3 zieht man nun die beiden Charakteristiken III ( $\lambda_3 = \text{const.}$ ) der Schar III und IV ( $\lambda_4 = \text{const.}$ ) der Schar IV, die die Punkte 4 und 5 auf der  $x$ -Achse geben. Von diesen aus rechnet man auf den Charakteristiken III und IV nach 3 mittels der den Gl. (14c) und (14d) entsprechenden Differenzgleichungen

$$\left. \begin{array}{l} p_2^3 - p_2^4 = -AQ^4 (\lambda_3^3 - \lambda_3^4) \\ \Phi^3 - \Phi^4 = q_2^4 (\lambda_3^3 - \lambda_3^4) \end{array} \right\} \text{ nach Gl. (14c),} \quad \left. \begin{array}{l} q_2^3 - q_2^5 = -AQ^5 (\lambda_4^3 - \lambda_4^5) \\ \Phi^3 - \Phi^5 = p_2^5 (\lambda_4^3 - \lambda_4^5) \end{array} \right\} \text{ nach Gl. (14d).}$$

Daraus erhält man  $p_2^3$  und  $q_2^3$  und doppelt den Wert  $\Phi^3$ . Hinreichende Übereinstimmung der beiden Werte  $\Phi^3$  muß allenfalls auch durch Verringerung des Abstandes 1—2 erreicht werden.



Dann wird man die Werte in 3 durch Iteration verbessern. Man wird beispielsweise neue Werte  $(p_1^3)$ ,  $(q_1^3)$ ,  $(z^3)$  rechnen nach den Gleichungen

$$\begin{aligned}(p_1^3) - p_1^1 &= A \frac{M^1 + M^3}{2} (\lambda_2^3 - \lambda_2^1) & (q_1^3) - q_1^2 &= A \frac{M^2 + M^3}{2} (\lambda_1^3 - \lambda_1^2) \\ (z^3) - z^1 &= \frac{q_1^1 + q_1^3}{2} (\lambda_2^3 - \lambda_2^1) & (z^3) - z^2 &= \frac{p_1^1 + p_1^3}{2} (\lambda_1^3 - \lambda_1^2),\end{aligned}$$

und analog neue Werte  $(p_2^3)$ ,  $(q_2^3)$  und  $(\Phi^3)$ .

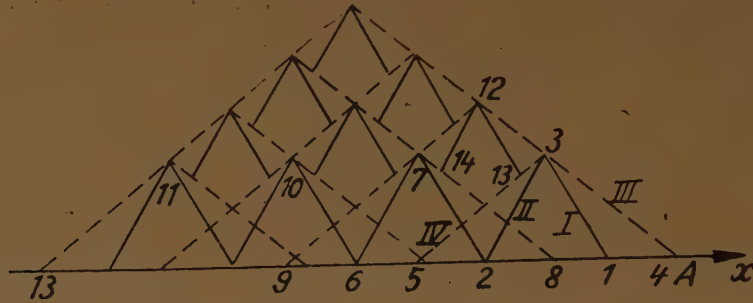


Bild 2.

Von 2 und 6 aus (Strecke 2—6 gleich Strecke 1—2) wird Punkt 7 gefunden als Schnitt der durch 2 und 6 gehenden Charakteristiken I und II. Von 7 aus werden 8 und 9 mittels der Charakteristiken III und IV durch 7 bestimmt und von 2, 6, 8, 9 aus die Zustandsgrößen in 7 berechnet. In dieser Weise ergeben sich weiter die Zustandsgrößen in den Punkten 10 und 11 in gleicher Höhe über der  $x$ -Achse wie 3 und 7, und mit diesen Punkten ist das gestrichelte Netz mit seinen Schnittpunkten auf III- und IV-Charakteristiken bestimmt. Die Zustandsgrößen in jedem Punkt der Strecken 3—4, 3—1, 3—2, 3—5, 7—2, ... werden dann als bekannt (durch lineare Interpolation zwischen den Endpunkten der Strecke angesehen). Die Zustandsgrößen in 12 ergeben sich auf Charakteristiken III, I, II, IV von 3, 13, 14, 7 aus usw.

In dieser Weise lassen sich die Werte  $z$ ,  $p_1$ ,  $q_1$ ,  $\Phi$ ,  $p_2$ ,  $q_2$  berechnen in diskreten Punkten eines Dreiecks in der  $xy$ -Ebene, das begrenzt ist von einem Stück  $AB$  der  $x$ -Achse und den beiden Charakteristiken III und IV durch  $A$  und  $B$ , wenn wir voraussetzen, daß III und IV gegen die  $x$ -Achse flacher verlaufen als I und II.

4. Wir geben den Gang des Rechenverfahrens noch für den folgenden Spezialfall von Rand- und Anfangsbedingungen.

Der Stab erstrecke sich von  $x=0$  bis  $x=\infty$ . Zur Zeit  $y=0$  sei  $z(x,0) \equiv 0$ . Damit ist für  $y=0$  auch  $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$  identisch in  $x$ . Ferner sei  $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$  für  $y=0$  und alle  $x$ ,  $\Phi(x,0) \equiv 0$  und damit auch  $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$  für  $y=0$  und alle  $x$ . Schließlich sei  $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$  für  $y=0$  und alle  $x$ . Alles entspricht dem Umstand, daß der Stab zur Zeit  $y=0$  im Ruhezustand sei. Damit sind auch  $M$  und  $Q$  zur Zeit  $y=0$  für alle  $x \geq 0$  gleich Null. In dem Gebiet rechts der Charakteristik IV durch 5 (Bild 3) ist alles Null. Das entspricht der Anfangsbedingung und den Differentialgleichungen (13a) und (13b).

Längs  $x=0$  sei  $z(0,y) \equiv 0$  (Stab bei  $x=0$  dauernd festgehalten); damit ist  $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$  längs der  $y$ -Achse. Ferner sei  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(0,y) = f(y)$  eine gegebene Funktion von  $y$  mit  $f(0)=0$ . Es wirkt also von  $y=0$  ab ein im allgemeinen zeitlich veränderliches Moment an der Stelle  $x=0$  auf den Stab.

In 6 (Bild 3) sind bekannt:  $z=0$  und  $\frac{\partial z}{\partial y} = c_1(p_1 - q_1) = 0$ . Also gilt in 6:  $z^6 = 0$ ;  $p_1^6 = q_1^6$ . Wegen  $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = f(y)$  ist, weil  $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_3} + \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_4}$ ,  $p_2^6 + q_2^6 = f(y^6)$ .  $p_2^6$  und  $\Phi^6$  erhält man auf III von 3 aus mit den den Gl. (14c) entsprechenden Differenzengleichungen

$$\begin{aligned}p_2^6 - p_2^3 &= -AQ^3(\lambda_4^6 - \lambda_4^3) \\ \Phi^6 - \Phi^3 &= q_2^3(\lambda_4^6 - \lambda_4^3).\end{aligned}$$

Damit hat man auch  $q_2^6$  aus  $q_2^6 = f(y^6) - p_2^6$ .



$p_1^6$  erhält man mit der zweiten Gl. (14a) entsprechenden Differenzengleichung  $p_1^6 - p_1^7 = \Delta M^7 (\lambda_2^6 - \lambda_2^7)$  längs I von 7 aus, wo die Zustandsgrößen durch lineare Interpolation zwischen 5 und 3 bekannt sind. Damit hat man nun  $z, p_1, q_1 = p_1, \Phi, p_2, q_2$  in 6.

Die Zustandsgrößen in 8 erhält man auf Charakteristiken IV, II, I, III von 6, 9, 10, 11 aus, wobei die Werte in 9 durch lineare Interpolation zwischen 6 und 3 erhalten sind und auf der Charakteristik IV von 5 über 7, 3, 10, 11, ... alles von rechts her bekannt ist.

Damit kann nun der Streifen zwischen den Charakteristiken IV von 5 aus und IV von 6 aus erledigt werden. Dann wird Punkt 12 analog wie 6 behandelt und der Streifen zwischen den Charakteristiken IV von 6 aus und IV von 12 aus erledigt usw.

Der Nachteil des Verfahrens ist die ungünstige Fehlerfortpflanzung. Sie bewirkt, daß man trotz Verkleinerung der mit 1—2 bezeichneten Strecke und der damit verbundenen Vermehrung der Rechenarbeit bei weiterem Fortschreiten in der  $y$ -Richtung immer wachsende Unsicherheit des Resultats bekommt.

5. Wie weit gibt das Näherungsverfahren Aufschluß über die Fortpflanzung von Unstetigkeiten im Moment  $M$  und der Querkraft  $Q$ ?

Es ist

$$M = E q k^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} = E q k^2 \bar{p}_2 = \frac{1}{4A} \bar{p}_2 = \frac{1}{4A} (p_2 + q_2)$$

$$Q = \Delta G q \left( \frac{\partial z}{\partial x} - \Phi \right) = \Delta G q (\bar{p}_1 - \Phi) = \Delta G q (p_1 + q_1 - \Phi).$$

Wir setzen voraus, daß  $M$  nur im Punkt 1 einen Sprung  $(\Delta M)^1$  habe. Damit hat  $\bar{p}_2$  in 1 einen Sprung  $(\Delta \bar{p}_2)^1 = \frac{1}{4A} (\Delta M)^1$ . Alle andern Größen seien auch in 1 stetig vorgegeben, insbesondere ist also  $(\Delta \bar{q}_2)^1 = 0$ .

Wir gehen nun auf die Variablen  $\lambda_i$  über. Nun gilt

$$\bar{p}_2 = p_2 + q_2 \quad \text{und} \quad \bar{q}_2 = c_2 (p_2 - q_2).$$

Also ist

$$(\Delta \bar{q}_2)^1 = c_2 [(\Delta p_2)^1 - (\Delta q_2)^1]$$

und wegen  $(\Delta \bar{q}_2)^1 = 0$ :

$$(\Delta p_2)^1 = (\Delta q_2)^1$$

als Folge unserer Voraussetzung, daß nur  $M$  bei 1 den Sprung  $(\Delta M)^1$  hat.

Wegen

$$M = \frac{1}{4A} (p_2 + q_2)$$

ist

$$(\Delta M)^1 = \frac{1}{4A} [(\Delta p_2)^1 + (\Delta q_2)^1] = \frac{1}{2A} (\Delta p_2)^1.$$

Längs der Charakteristik III von 1 aus gilt nach Gl. (14c), wenn wir die Differentialgleichung durch eine Differenzengleichung ersetzen (Bild 4)

$$p_2^3 - p_2^1 = -A Q^1 (\lambda_4^3 - \lambda_4^1),$$

und zwar beim Fortschreiten am linken Ufer von III

$$p_{2l}^3 - p_{2l}^1 = -A Q^1 (\lambda_4^3 - \lambda_4^1)$$

und am rechten Ufer

$$p_{2r}^3 - p_{2r}^1 = -A Q^1 (\lambda_4^3 - \lambda_4^1).$$

Hieraus folgt

$$(\Delta p_2)^3 = (\Delta p_2)^1 = 2A (\Delta M)^1.$$

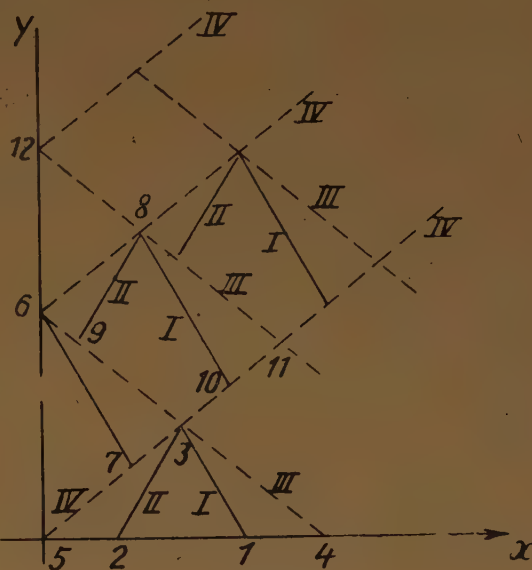


Bild 3.

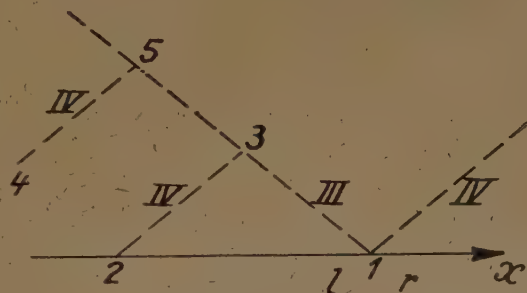


Bild 4.

Für  $q_2$  gilt längs der Charakteristik IV von 2 aus nach (14d):

$$q_2^3 - q_2^2 = -AQ^2(\lambda_3^3 - \lambda_3^2),$$

also, wenn wir wieder am linken und am rechten Ufer der Charakteristik IV von 2 nach 3 gehen

$$q_{2l}^3 - q_2^3 = -AQ^2(\lambda_3^3 - \lambda_3^2)$$

$$q_{2r}^3 - q_2^3 = -AQ^2(\lambda_3^3 - \lambda_3^2).$$

Hieraus folgt

$$(\Delta q_2)^3 = 0.$$

Für  $(\Delta M)^3$  erhalten wir also

$$(\Delta M)^3 = \frac{1}{4A} [(\Delta p_2)^3 + (\Delta q_2)^3] = \frac{1}{2} (\Delta M)^1.$$

Wir beachten noch, daß  $Q^3$  keinen Sprung hat, denn  $p_1^3$  und  $q_1^3$  werden auf I und II von zwei Punkten her gerechnet, wo keine Sprünge sind.

Wir rechnen noch einen Schritt weiter auf III von 3 nach 5.

Nach Gl. (14c) ist

$$p_2^5 - p_2^3 = -AQ^3(\lambda_4^5 - \lambda_4^3),$$

und zwar

$$p_{2l}^5 - p_2^5 = -AQ^3(\lambda_4^5 - \lambda_4^3)$$

und

$$p_{2r}^5 - p_2^5 = -AQ^3(\lambda_4^5 - \lambda_4^3).$$

Daher ist

$$(\Delta p_2)^5 = (\Delta p_2)^3 = 2A(\Delta M)^1.$$

Für  $q_2$  gilt längs der Charakteristik IV von 4 her

$$q_2^5 - q_2^4 = -AQ^4(\lambda_3^5 - \lambda_3^4),$$

also wieder

$$(\Delta q_2)^5 = 0.$$

$Q^5$  hat keinen Sprung, denn es wird auf Charakteristiken, auf denen keine Sprünge zwischen linkem und rechtem Ufer sind, von anderen Punkten her gerechnet.

Für  $(\Delta M)^5$  erhalten wir

$$(\Delta M)^5 = \frac{1}{4A} [(\Delta p_2)^5 + (\Delta q_2)^5] = \frac{1}{2} (\Delta M)^1.$$

Es ergibt sich also (beim weiteren Fortschreiten): Der Sprung  $(\Delta M)^1$  pflanzt sich zur Hälfte in konstanter Größe  $\frac{1}{2} (\Delta M)^1$  längs der Charakteristik III von 1 aus fort.

Die ganze analoge Rechnung zeigt, daß sich die andere Hälfte des Sprungs  $(\Delta M)^1$  in konstanter Größe längs der Charakteristik IV von 1 aus fortpflanzt.

Setzen wir nun voraus, daß nur in 1 ein Sprung  $(\Delta Q)^1$  der Querkraft  $Q$  sei. Damit hat  $\bar{p}_1$  einen Sprung  $\frac{1}{AGQ} (\Delta Q)^1$ . Alle andern Größen seien auch in 1 stetig vorgegeben, insbesondere ist  $(\Delta \bar{q}_1)^1 = 0$ . Nun gilt

$$\bar{p}_1 = p_1 + q_1 \quad \text{und} \quad \bar{q}_1 = c_1(p_1 - q_1),$$

also

$$\Delta \bar{q}_1 = c_1(\Delta p_1 - \Delta q_1).$$

Daher ist wegen  $(\Delta \bar{q}_1)^1 = 0$  wieder

$$(\Delta p_1)^1 = (\Delta q_1)^1$$

als Folge unserer Voraussetzung, daß nur  $Q$  bei 1 den Sprung  $(\Delta Q)^1$  hat. Also ist

$$(\Delta Q)^1 = 2AGQ(\Delta p_1)^1 = 2AGQ(\Delta q_1)^1.$$

Eine ganz entsprechende Rechnung zu der, die die Teilung und Fortpflanzung eines Sprunges von  $M$  zeigte, ergibt, daß sich ein Sprung in  $Q$  an der Stelle 1 zur Hälfte längs der von 1 ausgehenden Charakteristik I und zur Hälfte längs der von 1 ausgehenden Charakteristik II in konstanter Größe fortpflanzt.

Wir behandeln noch den Fall, daß in 1 das Moment  $M$  einen Sprung  $(\Delta M)^1$  und die Querkraft  $Q$  einen Sprung  $(\Delta Q)^1$  hat. Alle anderen Größen seien auch in 1 stetig vorgegeben. Damit hat  $\bar{p}_2$  in 1 einen Sprung  $(\Delta \bar{p}_2)^1$  und  $\bar{p}_1$  in 1 einen Sprung  $(\Delta \bar{p}_1)^1$ , aber es ist  $(\Delta \bar{q}_2)^1 = (\Delta \bar{q}_1)^1 = 0$  vorgegeben.

Wegen

$$\bar{q}_1 = c_1(p_1 - q_1)$$

gibt  $(\Delta q_1)^1 = 0$ :

$$(\Delta p_1)^1 = (\Delta q_1)^1,$$

und wegen

$$q_2 = c_2(p_2 - q_2)$$

gibt  $(\Delta q_2)^1 = 0$ :

$$(\Delta p_2)^1 = (\Delta q_2)^1.$$



Also ist

$$(\Delta M)^1 = \frac{1}{2A} (\Delta p_2)^1 = \frac{1}{2A} (\Delta q_2)^1$$

und

$$(\Delta Q)^1 = 2 \Delta G q (\Delta p_1)^1 = 2 \Delta G q (\Delta q_1)^1.$$

Rechnen wir jetzt längs der Charakteristik III von 1 nach 3 (Bild 4), so gilt wegen Gl. (14c):

$$p_{2l}^3 - p_{2l}^1 = -A Q^1 (\lambda_4^3 - \lambda_4^1)$$

$$p_{2r}^3 - p_{2r}^1 = -A Q^1 (\lambda_4^3 - \lambda_4^1),$$

also

$$(\Delta p_2)^3 = (\Delta p_2)^1 - A (\lambda_4^3 - \lambda_4^1) (\Delta Q)^1.$$

Und rechnen wir längs der Charakteristik IV von 2 nach 3, so gilt wegen Gl. (14d):

$$q_{2l}^3 - q_{2l}^2 = -A Q^2 (\lambda_3^3 - \lambda_3^2)$$

$$q_{2r}^3 - q_{2r}^2 = -A Q^2 (\lambda_3^3 - \lambda_3^2),$$

also

$$(\Delta q_2)^3 = 0.$$

Daher ist

$$(\Delta M)^3 = \frac{1}{4A} [(\Delta p_2)^3 + (\Delta q_2)^3] = \frac{1}{4A} (\Delta p_2)^1 - \frac{1}{4} (\lambda_4^3 - \lambda_4^1) (\Delta Q)^1 = \frac{1}{2} (\Delta M)^1 - \frac{1}{4} (\lambda_4^3 - \lambda_4^1) (\Delta Q)^1.$$

$(\Delta Q)^3 = 0$ , weil  $p_1^1$  und  $q_1^1$  längs Charakteristiken I und II von Punkten her gerechnet werden, an denen Stetigkeit für alle Größen vorausgesetzt ist. Damit ergibt sich nun für Punkt 5 auf III (Bild 4):

Nach Gl. (14c):

$$p_{2l}^5 - p_{2l}^3 = -A Q^3 (\lambda_4^5 - \lambda_4^3)$$

$$p_{2r}^5 - p_{2r}^3 = -A Q^3 (\lambda_4^5 - \lambda_4^3)$$

$$(\Delta p_2)^5 = (\Delta p_2)^3$$

und nach Gl. (14d):

$$q_{2l}^5 - q_{2l}^4 = -A Q^4 (\lambda_3^5 - \lambda_3^4)$$

$$q_{2r}^5 - q_{2r}^4 = -A Q^4 (\lambda_3^5 - \lambda_3^4)$$

$$(\Delta q_2)^5 = 0.$$

Also

$$(\Delta M)^5 = \frac{1}{4A} [(\Delta p_2)^5 + (\Delta q_2)^5] = \frac{1}{4A} (\Delta p_2)^3 = \frac{1}{2} (\Delta M)^1 - \frac{1}{4} (\lambda_4^3 - \lambda_4^1) (\Delta Q)^1 \text{ usw.}$$

Da  $\lambda_4^3 - \lambda_4^1$  beliebig klein angenommen werden kann, so zeigt die Rechnung, daß sich die Hälfte des Sprunges von  $M$  in 1 in konstanter Größe  $\frac{1}{2} (\Delta M)^1$  von 1 aus längs der Charakteristik III fortpflanzt. Die analoge Rechnung zeigt, daß sich die andere Hälfte von  $(\Delta M)^1$  von 1 aus längs der Charakteristik IV in konstanter Größe fortpflanzt.

Rechnen wir von 1 auf der Charakteristik I [nach Gl. (14a)] und von 1 auf der Charakteristik II [nach Gl. (14b)], so erhalten wir in ganz analoger Weise, daß sich der Sprung  $(\Delta Q)^1$  von  $Q$  in 1 je zur Hälfte auf diesen beiden Charakteristiken fortpflanzt.

Von einem Sprung  $(\Delta M)^1$  des Moments  $M$  und  $(\Delta Q)^1$  der Querkraft  $Q$  in einem Punkt pflanzt sich also je  $\frac{1}{2} (\Delta M)^1$  längs der Charakteristiken III und IV und je  $\frac{1}{2} (\Delta Q)^1$  längs der Charakteristiken I und II fort.

Eingegangen am 2. Febr. 1945.

## KLEINE MITTEILUNGEN

### Die Wirkung der Puffermasse beim Zusammenstoß von Eisenbahnwagen.

Stoßen zwei mit gefederten Puffern versehene Eisenbahnwagen zusammen, ist die Schwingungsbewegung leicht zu berechnen, wenn die Federn keine Masse haben [1<sup>a</sup>]. Die Masse der Puffer und Federn ist klein gegenüber der Wagenmasse. Bei einem von der Reichsbahn viel verwendeten Puffer ([4], S. 992) haben die bewegten Teile (Pufferhülse mit Teller und Stoßstange voll, Pufferfeder zur Hälfte gerechnet) ein Gewicht von etwa 92 kg, bei neueren Pufferbauarten [2] nur etwa 65 kg. Beim Zusammenstoß von zwei Wagen arbeiten vier Puffer gleichzeitig, die bewegliche Puffermasse ist also z. B.  $\frac{4 \cdot 92}{981} = 0,375 \text{ kgs}^2/\text{cm}$ , die Masse eines Wagens dagegen 25 bis 100mal größer.

Gottschalk [3] hat beobachtet, daß beim Auf-  
laufen eines schweren Wagens auf einen leichten die

Puffer des auflaufenden Wagens bei allen Auflaufgeschwindigkeiten sich mehr zusammendrücken als die des Prellbockwagens. Wir erklären diese Erscheinung dadurch, daß wir die Puffermasse bei dem Zusammenstoß berücksichtigen.

#### 1. Beliebige Massenverhältnisse.

Wir nehmen an, der Wagen  $a$  mit der Masse  $M = M_a$  fährt mit der Geschwindigkeit  $v_0$  auf einen stehenden Wagen  $c$  mit der Masse  $M_c = M : n$  auf. Zwischen den Wagen befindet sich die Federmasse  $M_b = M : m$ , zwischen  $M_a$  und  $M_b$  und zwischen  $M_b$  und  $M_c$  je eine Feder mit der Richtkraft  $c$ . Die Zeiten zählen von der ersten Pufferberührung ab, die Wege von der Lage der Massen zu dieser Zeit (Bild 1). Wir betrachten die Bewegung von einem Koordinatensystem aus, das sich mit der Geschwindigkeit des Massenschwerpunktes  $\bar{v}$  bewegt:

$$\bar{v} = \frac{mn v_0}{mn + m + n} \dots \dots \dots (1)$$

<sup>1)</sup> Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Schrifttumsverzeichnis am Schluß der Arbeit.

Die Differentialgleichungen für die Bewegung der drei Massen lauten:

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{x}_a &= -c(x_a - x_b) \\ \frac{M}{n} \ddot{x}_b &= c(x_a - x_b) - c(x_b - x_c) \\ \frac{M}{n} \ddot{x}_c &= c(x_b - x_c) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

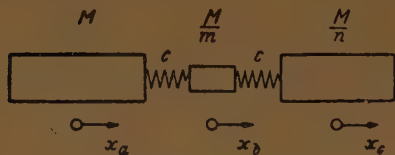


Bild 1. Federschaltbild.

Nach der über den Anfangszustand gemachten Annahme setzen wir an:

$$\left. \begin{aligned} x_a &= C_a \sin w t, \\ x_b &= C_b \sin w t, \\ x_c &= C_c \sin w t \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

und finden durch Einsetzen in Gl. (2) und nach Kürzung durch  $\sin w t$ :

$$\left. \begin{aligned} (M w^2 - c) C_a + c C_b &= 0 \\ c C_a + \left( \frac{M}{n} w^2 - 2c \right) C_b + c C_c &= 0 \\ c C_b + \left( \frac{M}{n} w^2 - c \right) C_c &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Die Hauptdeterminante des Ausdruckes (4) muß verschwinden, wenn eine endliche Lösung existieren soll. Nach Kürzung durch die triviale Lösung  $w^2 = 0$  ist mit der Abkürzung  $W = \sqrt{4m^2 + (n-1)^2}$ :

$$w_{1,2} = \sqrt{\frac{c}{2M}} \sqrt{2m + n + 1 \mp W} \quad (5)$$

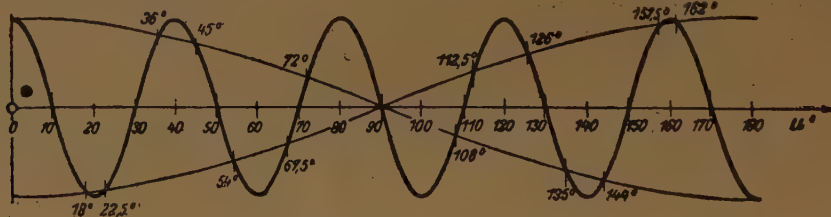


Bild 2.  $\cos u = \pm \cos 9u$ .

Das Verhältnis

$$p = w_2 : w_1 \quad (6)$$

ist nur von  $m$  und  $n$  abhängig.

$$x_a = C_{a1} \sin w_1 t + C_{a2} \sin w_2 t \quad (7)$$

Die Konstanten  $C_b$  und  $C_c$  rechnen wir mit den Gl. (4) aus.

$$\left. \begin{aligned} x_b &= -\frac{C_{a1}}{2} (2m + n - 1 - W) \sin w_1 t \\ &\quad - \frac{C_{a2}}{2} (2m + n - 1 + W) \sin w_2 t \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{n C_{a1}}{2m} (n - 1 - W) \sin w_1 t \\ &\quad + \frac{n C_{a2}}{2m} (n - 1 + W) \sin w_2 t \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Für  $t = 0$  ist die Geschwindigkeit der Wagen unter Beachtung von Gl. (1):

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{a0} &= v_0 \frac{m+n}{mn+m+n}, \\ \dot{x}_{b0} &= \dot{x}_{c0} = -v_0 \frac{mn}{mn+m+n} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Mit diesen Randbedingungen werden die Konstanten  $C_{a1}$  und  $C_{a2}$ :

$$\left. \begin{aligned} C_{a1} &= \frac{v_0 (2m^2 + n^2 + mn - m - n + (m+x)W)}{2w_1 (mn + m + n)W} \\ C_{a2} &= \frac{-v_0 (2m^2 + n^2 + mn - m - n - (m+n)W)}{2w_2 (mn + m + n)W} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Die Federkräfte sind  $P_{ab} = c(x_a - x_b) = -M \ddot{x}_a$  und  $P_{bc} = c(x_b - x_c) = \frac{M}{n} \ddot{x}_c$ . Die Höchstwerte von  $\ddot{x}_a$  und  $\ddot{x}_c$  liefern die Gleichungen  $\ddot{x}_a = 0$  und  $\ddot{x}_c = 0$ . Die Werte  $P_{ab \max}$  und  $P_{bc \max}$  vergleichen wir mit den Größtkräften  $P_{\max}^*$ , die beim Vernachlässigen der Puffermasse errechnet werden [1]:

$$P_{\max}^* = v_0 \sqrt{\frac{c' M}{n+1}}$$

Dabei ist zu bedenken, daß die Federkraft  $c'$  für vier Pufferfedern berechnet wird, von denen je zwei nebeneinander und hintereinander geschaltet sind, während  $c$  für zwei nebeneinandergeschaltete Federn gilt, so daß  $c' = c : 2$  ist:

$$P_{\max}^* = v_0 \sqrt{\frac{c M}{2(n+1)}} \quad (12)$$

$$q = P_{ab \max} : P_{\max}^* \quad (13)$$

und

$$r = P_{bc \max} : P_{\max}^* \quad (14)$$

## 2. Zahlenbeispiel.

Wir nehmen  $M_a = 30$ ,  $M_b = 0,375$  und  $M_c = 10 \text{ kgs}^2/\text{cm}$  an ( $m = 80$  und  $n = 3$ ). Nach Gl. (5) wird  $w_1 = 1,412 \sqrt{c/M}$  und  $w_2 = 12,728 \sqrt{c/M}$  und nach

Gl. (6)  $p = 9,014$ . Nach Gl. (11) wird  $C_{a1} w_1 = 0,26203 v_0$  und  $C_{a2} w_2 = 0,00314 v_0$ . Die Gleichung  $\ddot{x}_a = 0$  lautet, wenn man  $w_1 t = u$  setzt,

$$\cos u + 0,9750 \cos 9,014 u = 0.$$

Die Gleichung hat verschiedene Null-Stellen. Der größte Wert für  $\ddot{x}$  ist in der Nähe von  $u = \pi/2$  zu erwarten (Bild 2), und man findet die Lösung für  $u = 89,88^\circ$ . Damit wird  $P_{ab \max} = 0,4100 v_0 \sqrt{c/M}$ . Die Gleichung  $\ddot{x}_c = 0$  lautet:

$$\cos u - 0,9997 \cos 9,014 u = 0.$$

Die Gleichung gibt bei  $u = 89,88^\circ$  für  $\ddot{x}_c$  einen Kleinstwert. Die benachbarten Höchstwerte liegen bei  $u_1 = 71,90^\circ$  und  $u_2 = 107,85^\circ$ . Die zugehörigen größten Kräfte sind  $P_{bc} = 0,3859 v_0 \sqrt{c/M}$  und  $0,3864 v_0 \sqrt{c/M}$ . Die Feder  $ab$  wird also um 6,1% mehr beansprucht als die Feder  $bc$ . Nach Gl. (12) ist die größte Kraft ohne Berücksichtigung der Puffermassen  $P_{\max}^* = 0,3536 v_0 \sqrt{c/M}$ ,  $q = 1,160$  und  $r = 1,093$ , d. h. die Federn werden tatsächlich 16,0 bzw. 9,3% mehr beansprucht, als sich bei Vernachlässigung der Federmasse ergibt.



3. Darstellung der Verhältniszahlen  $q$  und  $r$  für  $n = 1$ .

Haben der stoßende und gestoßene Wagen gleiche Massen ( $n = 1$ ), vereinfachen sich die Gleichungen.

$$w_1 = \sqrt{\frac{c}{M}} \quad \text{und} \quad w_2 = \sqrt{\frac{c}{M}} \sqrt{2m+1} \quad (5a)$$

$$p = \sqrt{2m+1} \quad (6a)$$

$w_1$  ist die Kreisfrequenz der Schwingung ohne Puffermasse und  $w_2$  die Kreisfrequenz einer Oberschwingung.

$$C_{a1} = \frac{v_0}{2} \sqrt{\frac{M}{c}} \quad \text{und} \quad C_{a2} = C_{a1} : p^3 \quad (11a)$$

Die Amplituden der Oberschwingung sind also im Verhältnis  $1:p^3$  kleiner als die der Grundschwingung. Die Pufferkräfte sind

$$P_{ab} = \frac{v_0}{2} \sqrt{cM} \left( \sin u + \frac{1}{p} \sin pu \right),$$

$$P_{bc} = \frac{v_0}{2} \sqrt{cM} \left( \sin u - \frac{1}{p} \sin pu \right),$$

$$P_{\max}^* = \frac{v_0}{2} \sqrt{cM} \quad (12a)$$

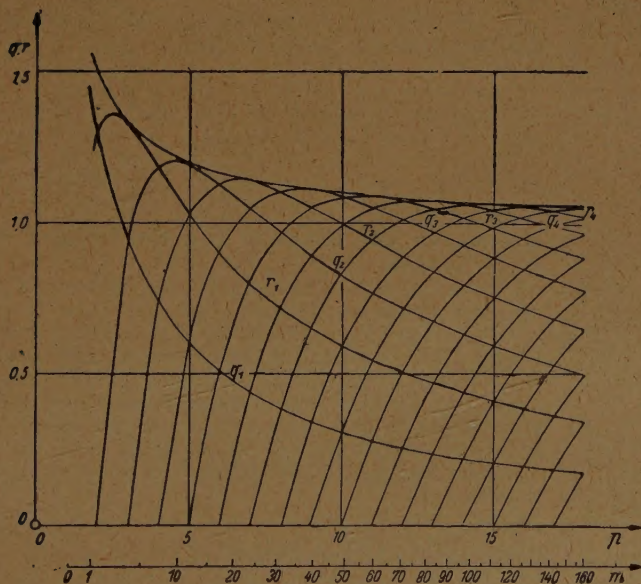


Bild 3. Verhältnis der größten Pufferkräfte.

Den Höchstwert für  $P_{ab}$  finden wir aus der Bedingung  $\cos u + \cos pu = 0$ .  $u = (2z-1)\pi - pu$ , wobei  $z = 1, 2, 3, \dots$  und  $z_{\max} \leq \frac{p}{2} + 1$  ist.

$$u = \frac{(2z-1)\pi}{p+1}$$

Dabei ist  $\sin u = \sin pu$  und damit

$$q = \left( 1 + \frac{1}{p} \right) \sin \frac{(2z-1)\pi}{p+1} \quad (13a)$$

Für den Höchstwert von  $P_{bc}$  gilt die Bedingung  $\cos u - \cos pu = 0$ ,  $u = 2\pi z - pu$ , wobei  $z = 1, 2, 3, \dots$  und  $z_{\max} \leq \frac{p+1}{2}$  ist,  $u = \frac{2\pi z}{p+1}$ . Dabei ist  $\sin u = -\sin pu$  und

$$r = \left( 1 + \frac{1}{p} \right) \sin \frac{2\pi z}{p+1} \quad (14a)$$

Die Zahlen  $q$  und  $r$  sind in Bild 3 über  $p$  dargestellt.

Die Hyperbel  $1 + \frac{1}{p}$  hüllt die  $q$ - und  $r$ -Kurven ein.

Die größten Werte von  $q$  und  $r$  sind immer größer als 1, d. h. die Berücksichtigung der Puffermasse erhöht immer die Federkräfte. Im Bereich der im Eisenbahnwesen vorkommenden Verhältnisse ist  $m$  etwa = 25 bis 160, d. h.  $p = 7$  bis 18. Die Beobachtung Gottschalks, daß die Feder des auflaufenden Wagens mehr beansprucht wird [3], bestätigt sich in den Bereichen  $p = 8$  bis 10, 12 bis 14 und 16 bis 18. In den Bereichen  $p = 6$  bis 8, 10 bis 12 und 14 bis 16 ist das Gegenteil zu erwarten, hier wird sich die Feder des angestoßenen Wagens mehr zusammendrücken.

#### 4. Ergebnis.

Vernachlässigt man beim Berechnen des Zusammenstoßes von zwei Eisenbahnwagen die Masse der Pufferfedern, erhält man größte Pufferkräfte, die bis 15% kleiner als die wirklichen sein können. Die Puffer des auflaufenden und des angestoßenen Wagens drücken sich im allgemeinen verschieden stark zusammen.

#### Schrifttumverzeichnis.

1. Föpl, Aufgaben aus der technischen Mechanik, München und Berlin 1930.
  2. Pfennings, Die Zug- und Stoßvorrichtungen an den neuen Wagen der Deutschen Reichsbahn. Organ Fortsch. Eisenbahnwes. Bd. 94 (1939), H. 22, S. 422.
  3. Gottschalk, Schädlichkeit der Rangierstöße beim Stoßverfahren. Organ Fortsch. Eisenbahnwes. Bd. 89 (1934), H. 23, S. 421.
  4. Hütte, Des Ingenieurs Taschenbuch, Bd. III, 26. Aufl. Berlin 1934.
- Oppeln. Gerhart Potthoff.

#### Über das Abklingen von Schwingungen mit schwacher in beliebiger Weise von der Geschwindigkeit abhängiger Dämpfung.

Wir betrachten eine Schwingung von der Form

$$\ddot{x} + f(\dot{x}) + \omega^2 x = 0 \quad (1),$$

wobei  $f(\dot{x})$  in dem durch die Anfangsamplitude  $a_0$  festgelegten Intervall  $-\omega a_0 \leq x \leq +\omega a_0$  eine ungerade analytische nicht abnehmende Funktion sein soll. Wegen der Approximierbarkeit allgemeinerer, etwa geknickter Kurven durch Polynome ist dies keine wesentliche Einschränkung.

Der Betrag von  $f(\dot{x})$  sei so klein, daß während einer Schwingung die Amplitude nicht merklich abnimmt, also  $|f(\dot{x})| \ll \omega^2 a_0$ .

Multiplikation von (1) mit  $\dot{x}$  und Integration über das Zeitintervall zwischen zwei konsekutiven Nullstellen von  $\dot{x}$  mit den zugehörigen  $x$ -Koordinaten  $x = -x_0$  und  $x = +x_1$  ergibt

$$0 + \int f(\dot{x}) \dot{x} dt + \frac{\omega^2}{2} (x_1^2 - x_0^2) = 0.$$

Gemäß der vorausgesetzten geringen Dämpfung und der hieraus folgenden langsamen Amplitudenänderung führen wir die Amplitude  $a$  zu Beginn der einzelnen Schwingung und den Betrag  $\Delta a$  der Amplitudenänderung während einer Vollschrwingung ( $\Delta a > 0$ ) ein, so daß unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung geschrieben werden kann  $x_0 = -a$ ,  $x_1 = a - \frac{\Delta a}{2}$  und



$$x_1^2 - x_0^2 = -a \cdot \Delta a,$$

$$\int f(x) \dot{x} dt - \omega^2 \cdot a \cdot \Delta a = 0.$$

Weiter kann wegen der schwachen Dämpfung das hier auftretende Integral genähert aus der ungedämpften Schwingung berechnet werden, es darf also

$$\dot{x} = \omega \sqrt{a^2 - x^2}$$

gesetzt und als Integrationsintervall die halbe Schwingungsdauer  $\frac{1}{2} T_0$  genommen werden. Es ist dann

$$a \cdot \Delta a = \frac{1}{\omega^2} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} f(\omega \sqrt{a^2 - x^2}) \dot{x} dt$$

$$a \cdot \Delta a = \frac{1}{\omega^2} \int_{-a}^{+a} f(\omega \sqrt{a^2 - x^2}) dx$$

$$\Delta a = \frac{2}{\omega^2 a} \int_0^a f(\omega \sqrt{a^2 - x^2}) dx.$$

Ist die Auffassung der Amplitude  $a$  als einer stetig-differenzierbaren Funktion der Zeit gestattet (Hüllkurve nach Zech<sup>1)</sup>), so kann weiter geschrieben werden

$$-\Delta a = T_0 \dot{a} = \frac{2\pi}{\omega} \dot{a},$$

$$\dot{a} = -\frac{\omega}{2\pi} \Delta a,$$

also

$$\dot{a} = -\frac{2}{\pi \omega a} \int_0^a f(\omega \sqrt{a^2 - x^2}) dx \quad (2)$$

oder mit der Substitution  $x = a \cdot \cos \varphi$

$$\omega \dot{a} = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\omega a \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi \quad (3).$$

Die explizite Berechnung des Amplitudenverlaufs für gegebenes  $f$  nach (3) läuft jetzt ersichtlich auf die Berechnung eines bestimmten Integrals hinaus. Wir wollen hier jedoch die umgekehrte Aufgabe behandeln, aus dem beobachteten Abklingvorgang auf das Dämpfungsgesetz zu schließen.

Es sei also die Funktion  $a = a(t)$  und damit auch  $\dot{a}(t)$  gegeben. Man verfügt somit über eine Parameterdarstellung der Funktion  $\dot{a}(a)$ , die wir im folgenden benötigen. Die Funktion  $f(x)$  soll nun berechnet werden.

Hierzu führen wir auf der rechten Seite von (2) die neue Integrationsvariable  $u$  ein:

$$u = \omega^2 (a^2 - x^2), \quad x = \sqrt{a^2 - \frac{u}{\omega^2}},$$

$$dx = -\frac{1}{2\omega^2} \cdot \frac{du}{\sqrt{a^2 - \frac{u}{\omega^2}}}$$

und erhalten

$$\dot{a} = -\frac{1}{\pi \omega^2 a} \int_0^{\omega^2 a^2} \frac{f(\sqrt{u}) du}{\sqrt{\omega^2 a^2 - u}}$$

oder mit  $v = \omega^2 a^2$  anstelle von  $a$

$$\dot{v} = -\frac{2}{\pi} \int_0^v \frac{f(\sqrt{u}) du}{\sqrt{v - u}} \quad (4).$$

Dies ist eine Abelsche Integralgleichung für  $f$ . Sie hat die Lösung<sup>2)</sup>

$$f(\sqrt{u}) = -\frac{d}{du} \int_0^u \frac{v}{\sqrt{u-v}} dv.$$

Schreiben wir jetzt  $\dot{x}$  anstelle von  $\sqrt{u}$  und ersetzen wir die Integrationsvariable  $v$  wieder durch  $a$ , so erhalten wir wegen  $v = 2\omega^2 a^2$  die gesuchte Dämpfungsfunktion  $f(x)$  in der Gestalt

$$f(x) = -4\omega^4 \frac{d}{d(x^2)} \int_0^{\frac{x}{\omega}} \frac{a(a) a^2 da}{\sqrt{x^2 - \omega^2 a^2}} \quad (5).$$

Besteht speziell zwischen  $a$  und  $\dot{a}$  eine Beziehung der Form  $\dot{a} = -c \cdot a^n$ , so tritt in (5) auf der rechten Seite ein Integral der folgenden Form auf:

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} x^n dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-y)^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{n-1}{2}} dy$$

$$= \frac{1}{2} B\left(-\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)},$$

und es ergibt sich für die Dämpfung

$$f(x) = \frac{n+2}{2} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+4}{2}\right)} \cdot c \cdot \omega^{1-n} \cdot x^n.$$

Dresden.

Plato.

### Eingrenzen der Wurzeln von Gleichungen 3. bis 6. Grades.

Wenn man sich rasch einen Überblick verschaffen will, wo die reellen Wurzeln einer Gleichung 3. bis 6. Grades etwa liegen, hilft oft ein Verfahren, das hier am Beispiel der Gleichung 6. Grades gezeigt wird. Das Verfahren gibt mit voller Strenge darüber Auskunft, wo reelle Wurzeln ausgeschlossen sind; bei Gleichungen 3. bis 5. Grades kann man den zu untersuchenden Bereich beliebig vorschreiben.

Die Gleichung 6. Grades mit konstanten reellen Koeffizienten

$$x^6 + a x^5 + b x^4 + c x^3 + d x^2 + e x + f = 0 \quad (1a)$$

werde umgeformt zum Beispiel in

$$\left. \begin{aligned} x(x^3 + c) & (x^2 + a x + b) \\ & = (a c - d) x^3 + (b c - e) x - f \end{aligned} \right\} \quad (1b).$$

Nur für die folgende Erklärung werde dafür kurz geschrieben

$$y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 = y_4 \quad (1c),$$

worin

$$y_1 = x \quad y_2 = x^3 + c \quad y_3 = x^2 + a x + b \quad (2) \text{ bis } (5)$$

und  $y_4 = (a c - d) x^3 + (b c - e) x - f$  gesetzt sind. Die leicht aufzulösenden Gleichungen

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 0, \quad y_4 = 0$$

ergeben diejenigen reellen  $x$ , bei denen eine der Funktionen  $y$  das Vorzeichen wechselt, wenn  $x$  alle reellen Werte von  $-\infty$  bis  $+\infty$  durchläuft. Diese „Grenzwerte“ seien der Größe nach geordnet

$$g_1 g_2 g_3 g_4 g_5 g_6 \quad (6).$$

In dem Bereich zwischen zwei aufeinanderfolgenden Grenzwerten kann Gl. (1b) durch einen reellen Wert von  $x$  nur erfüllt werden, wenn die Vorzeichen von  $y_1$  bis  $y_4$  zueinander passen. In den Bereichen, wo sie

<sup>1)</sup> G. Hohelsel, Integralgleichungen, S. 117. Sammlung Götschen. Berlin u. Leipzig 1936.

G. Kowalewski, Integralgleichungen, S. 9. Berlin u. Leipzig 1930.

<sup>2)</sup> Th. Zech, Ing.-Arch. Bd. 13 (1942), S. 21–33.



nicht zueinander stimmen, sind reelle Wurzeln der Gl. (1) ausgeschlossen. Ob in den Bereichen, wo reelle Wurzeln danach in Frage kommen, sich tatsächlich Wurzeln befinden und wie viele, muß dann durch Betrachtung der Zahlenwerte untersucht werden.

Beispiel 1:

$$\left. \begin{aligned} x^6 + 3x^5 - 41x^4 - 87x^3 \\ + 400x^2 + 444x - 720 = 0 \end{aligned} \right\} \dots (7a)$$

wird umgeformt in

$$\left. \begin{aligned} x(x^3 - 87)(x^3 + 3x - 41) \\ = -661x^2 + 3123x + 720 \\ = -661(x^2 - 4,7x - 1,1) \end{aligned} \right\} \dots (7b).$$

$$y_1 = 0 \text{ gibt } x = 0 \dots (8),$$

$$y_2 = 0 \text{ gibt } x^3 - 87 = 0 \text{ mit der reellen } \left. \begin{aligned} & \text{Lösung } x = +4,4 \end{aligned} \right\} \dots (9),$$

$$y_3 = 0 \text{ bedeutet } x^2 + 3x - 41 = 0 \left. \begin{aligned} & \text{und gibt } x = +5,1 \text{ und } x = -8,1 \end{aligned} \right\} \dots (10),$$

$$y_4 = 0 \text{ bedeutet } x^2 - 4,7x - 1,1 = 0 \left. \begin{aligned} & \text{und gibt } x = +4,9 \text{ und } x = -0,3 \end{aligned} \right\} \dots (11).$$

Die Grenzwerte lauten geordnet

$$-8,1 \quad -0,3 \quad 0 \quad 4,4 \quad 4,9 \quad 5,1 \dots (12).$$

Für jeden Wert von  $x$  unter  $-8,1$ , z. B. für  $x = -10$ , werden  $y_1$  negativ,  $y_2$  negativ,  $y_3$  positiv,  $y_4$  negativ, somit kann hier keine reelle Wurzel der Gl. (7) liegen, denn schon die Vorzeichen passen nicht zueinander.

Für jeden Wert von  $x$  zwischen  $-8,1$  und  $-0,3$  werden alle vier  $y$  negativ, folglich sind hier reelle Wurzeln nicht ausgeschlossen. In Fortsetzung dieser Betrachtungen findet man, daß in den gestrichenen Bereichen reelle Wurzeln ausgeschlossen sind:

$$\text{---} -8,1 \quad -0,3 \quad 0 \quad 4,4 \quad 4,9 \quad 5,1 \text{---}.$$

Der schmale Bereich  $4,9 < x < 5,1$  macht es leicht, durch probeweises Einsetzen  $x = 5,0$  als Wurzel der Gl. (7) zu erkennen. Bekanntlich ist dann mindestens noch eine reelle Wurzel vorhanden, doch ehe wir versuchen, sie durch probeweises Einsetzen zu finden, können wir die Bereiche noch weiter eingengen. Gl. (7) läßt sich noch auf eine 2. Weise umformen:

$$\left. \begin{aligned} x^2(x^2 - 29)(x^2 + 3x + 12) \\ = -52x^2 - 444x + 720 \end{aligned} \right\} \dots (7c)$$

nach der Formel

$$\left. \begin{aligned} x^2(x^2 + c/a)(x^2 + a x + b - c/a) \\ = [(b - c/a)(c/a) - d]x^2 - e x - f \end{aligned} \right\} \dots (7d).$$

In Gl. (11c) schlagen, wenn  $x$  alle reellen Werte durchläuft, die Vorzeichen um bei

$$\left. \begin{aligned} \text{---} 9,9 \quad \text{---} 5,4 \quad \text{---} 5,3 \\ + 1,4 \quad + 2,3 \quad + 5,4 \end{aligned} \right\} \dots (13).$$

Die Striche bezeichnen diejenigen Bereiche, in denen reelle Wurzeln der Gl. (7c) ausgeschlossen sind; sie wurden durch Betrachtung der Vorzeichen ermittelt.

Durch Vergleich der Grenzwertfolgen (12) und (13) beschränken sich die Bereiche, in denen reelle Wurzeln der Gl. (7) ausgeschlossen sind, auf

$$\text{---} -8,1 \quad \text{---} 5,4 \quad \text{---} 5,3 \quad -0,3 \quad 0 \\ 1,4 \quad 2,3 \quad 4,4 \quad 4,9 \quad 5,1 \text{---}.$$

Die offenen 5 Bereiche sind zwar noch kein Beweis für das Vorhandensein von mindestens 5 reellen Wurzeln, aber sie machen es wahrscheinlich und erleichtern die Suche, die jetzt durch probeweises Einsetzen, z. B. nach dem Horner-Schema, aufgenommen werden kann. Man findet dann die 6 reellen Wurzeln

$$-6, \quad -4, \quad -2, \quad +1, \quad +3, \quad +5.$$

Beispiel 2:

$$x^6 + x^3 + 10x^2 + 10x + 8 = 0 \dots (14a).$$

Die Umformung gemäß (1b) ergibt

$$x^3(x^3 + 1) = -10(x^2 + x + 0,8) \dots (14b).$$

$x^2 + x + 0,8 = 0$  hat keine reellen Lösungen, gibt daher keine Grenzwerte; als solche bleiben nur aus

$$x^3 = 0 \quad x = 0 \dots (15)$$

und aus

$$x^3 + 1 = 0 \quad x = -1 \dots (16).$$

Für alle  $x < -1$  ist Gl. (14b) schon vorzeichenmäßig unerfüllbar, ebenso für alle  $x > 0$ . Für  $-1 < x < 0$  ist Gl. (14b) aber zahlenmäßig nicht erfüllbar. Somit ist der strenge Beweis erbracht, daß Gl. (14) keine reellen Wurzeln hat. Sie wurde aufgebaut aus

$$(x^2 + 2x + 2)(x^2 + x + 1)(x^2 - 3x + 4) = 0 \quad (14c).$$

In diesen Beispielen schälten sich die Bereiche aus den Umformungen heraus, die nach Belieben vorgenommen werden dürfen. Bei den Gleichungen 3. bis 5. Grades kann man sogar einen Bereich vorschreiben. Er sei durch  $r$  und  $s$  begrenzt. Wir bilden  $r + s = -u$  und  $rs = p$  und führen  $v = a - u$  ein.

Für die Gleichung 3. Grades gilt dann

$$(x^2 + u x + p)(x + v) = (p + u v - b)x + p v - c.$$

Für die Gleichung 4. Grades bieten sich

$$\begin{aligned} (x^2 + u x + p)(x^2 + v x + q) \\ = (p v + q u - c)x + p q - d, \end{aligned}$$

$$\text{wo } q = b - p - u v,$$

$$\text{oder } = (p + q + u v - b)x^2 + p q - d,$$

$$\text{worin } q = p + (c - a p) / u,$$

$$\text{oder } = x[(p + q + u v - b)x + p v + q u - c],$$

$$\text{worin } q = d / p.$$

Für die Gleichung 5. Grades gilt

$$\begin{aligned} x(x^2 + u x + p)(x^2 + v x + q) \\ = (p v + q u - c)x^2 + (p q - d)x - e, \end{aligned}$$

$$\text{worin } q = b - p - u v.$$

Schreibt man hingegen keinen Bereich vor, sondern läßt die Bereiche aus der Umformung hervorgehen, so hat man bei den Gleichungen 3. bis 5. Grades viele Möglichkeiten, von denen nur einige noch aufgeführt seien.

Umformungen der Gleichung 3. Grades

$$(x + a)(x^2 + b) = a b - c$$

$$(x - a)x^2 = -b x - c$$

$$x^3 + c = -x(a x + b)$$

$$x(x^2 + b) = -a x^2 - c$$

der Gleichung 4. Grades

$$x^4 + b x^2 + d = -x(a x^2 + c)$$

$$x^4 + d = -x(a x^2 + b x + c)$$

$$x^3(x + a) = -b x^2 - c x - d$$

$$(x^2 + b)(x^2 + d/b) = -x(a x^2 - d x/b + c)$$

$$(x^2 + b)(x + a)x = (a b - c)x - d,$$

der Gleichung 5. Grades

$$(x^3 + c)(x^2 + a x + b) = (a c - d)x + b c - e$$

$$x^2(x^2 + b)(x + a) = (a b - c)x^2 - d x - e$$

$$x(x^4 + b x^2 + d) = -a x^4 - c x^2 - e$$

$$(x + a)(x^4 + b x^2 + d) = (a b - c)x^2 + a d - e$$

$$(x + a)(x^4 + b x^2 + e/a) = [(a b - c)x + e/a - d]x.$$

Die sämtlichen Umformungen einer Gleichung lassen sich nebeneinander anwenden und ihre „Grenzwerte“ zu einer einzigen Reihe zusammensetzen, durch die die reellen Wurzeln oft so stark eingengt werden, daß man geradezu Näherungswerte erhält, jedoch müssen sie jeweils durch Einsetzen geprüft werden. Das beschriebene Verfahren gibt für das Nichtvorhandensein reeller Wurzeln in gewissen Bereichen strenge Beweise, für das Vorhandensein in den dazwischenliegenden Bereichen zwar nur Wahrscheinlichkeiten, die aber für das Aufsuchen der Wurzeln nach weiteren, bekannten Verfahren wertvollste Dienste leisten und dem praktischen Rechner daher willkommen sein dürften.

Potsdam-Babelsberg.

H. Pauli.



# NACHRICHTEN

## Hochschulsnachrichten.

In den Jahren 1945/46 traten an den deutschen Universitäten und Hochschulen unter den Dozenten für Mathematik und theoretische Physik unter anderen folgende Veränderungen ein:

Aachen: Der apl. Prof. a. d. Techn. Hochschule Berlin Dr. Günther Schulz wurde als Nachfolger von Prof. Dr. R. Sauer zum o. Prof. ernannt.

Der o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Breslau Hubert Cremer erhielt einen Lehrauftrag.

Dr. Josef Meixner wurde zum a. o. Prof. der Theoretischen Physik berufen.

Berlin, Universität: Zu o. Prof. wurden ernannt: Dr. Hermann Ludwig Schmidt (Mathematik), Dr. Kurt Schroeder (Angew. Mathematik), Dr. Robert Rompe und Dr. Kurt Möglich (Theoretische Physik).

Einen Lehrauftrag erhielten: Prof. Dr. E. Rembs (Darstellende Geometrie), Studienrat Dr. Schürer (Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften).

Verstorben ist Prof. Dr. Harald Geppert.

Berlin, Technische Universität: Prof. Dr. E. Mohr und Dr. E. Rembs wurden zu o. Professoren ernannt.

Gefallen ist Prof. Dr. W. Cauer.

Bonn: Im März 1946 verstarb Prof. Dr. Erich Bessel-Hagen.

Braunschweig: Einen Lehrauftrag erhielten: Dr. habil. Hilmar Wendt (Mathematik), Prof. Dr. C. Weber (Dresden) (Sondergebiet der technischen Mechanik).

Darmstadt: Im September 1944 fielen die Assistenten Dr. Heinz Thomas und Dr. Ulrich Sinogowitz.

Dresden: Als Nachfolger von Prof. Dr. C. Weber wurde Dr. H. Neuber zum o. Prof. der Mechanik, als Nachfolger von Prof. Dr. Ludwig, Prof. Dr. Ott-Heinrich Keller zum o. Prof. der Geometrie ernannt.

Es starben Prof. Dr. M. Lagally im Januar 1945, Prof. Dr. B. Schilling im Sommer 1945, Prof. Dr. E. Naetsch im Frühjahr 1946, Prof. Dr. W. Ludwig im Dezember 1946.

Frankfurt: Dr. W. Franz wurde mit der Vertretung eines Ordinarius beauftragt.

Fräulein Dr. Ruth Moufang erhielt eine Dozentur.

Prof. Dr. W. Lorey wurde zum Honorarprofessor in der sozialwissenschaftlichen Fakultät ernannt.

Freiburg i. Br.: Dem Dozenten a. d. Universität Göttingen Dr. H. Görtler wurde im Dezember 1944 die a. o. Professur für angew. Mathematik übertragen.

Der a. o. Prof. a. d. Universität Greifswald G. Bol erhielt eine Diätendozentur.

Prof. Dr. E. Sperner (Straßburg) wurde mit der Vertretung eines Ordinarius beauftragt.

Prof. Dr. Jos. E. Hofmann erhielt eine Gastprofessur.

Gießen: Es starben Honorarprof. Dr. Ph. Maenn-

chen 1945, o. Prof. Dr. H. Falkenberg im Februar 1946.

Göttingen: Zu o. Professoren wurden ernannt Prof. Dr. F. Rellich (Dresden), Prof. Dr. W. Magnus (Königsberg).

Im W.-S. 1946/47 hielt Prof. Dr. Siegel Vorlesungen als Gastprofessor.

Zu apl. Professoren wurden ernannt: Dr. Helene Braun, Dr. H. Wittich, Dr. H. Münzner.

Zum 1. April 1947 wurde Prof. Dr. Ludwig Prandtl emeritiert. Als sein Nachfolger wurde Prof. Dr. W. Tollmien (Dresden) berufen.

Hamburg: Die Leitung des neugegründeten Instituts für angewandte Mathematik wurde Prof. Dr. H. Zassenhausen übertragen.

Im Spätwinter 1946/47 starb Prof. Dr. E. Hecke. Hannover: Rektor ist z. Z. Prof. Dr. Conrad Müller.

Heidelberg: Aus Frankfurt wurden die o. Professoren Dr. H. Seiffert und Dr. W. Threlfall berufen.

Karlsruhe: Rektor ist z. Z. Prof. Dr. Th. Pöschl.

Prof. Dr. K. Klotter (T. H. Berlin) wurde zum o. Professor der Mathematik und ihrer Anwendungen ernannt.

Gefallen ist Dr. Roßbach.

Köln: Umhabilitiert hat sich Doz. Dr. M. Pinl. Rehabilitiert wurde Prof. Dr. E. Fischer.

Mainz: Als o. Professoren wurden berufen: Prof. Dr. R. Furch (Rostock) und Prof. Dr. G. Koethe (Gießen) als a. o. Professor Dr. H. Wielandt (Tübingen).

Prof. Dr. H. Rohrbach (Prag) wurde eine Gastprofessur übertragen.

Prof. Dr. K. Bechert (Gießen) wurde als o. Professor für theoretische Physik berufen.

Es habilitierte sich Dr. F. Oberhettinger.

Einen Lehrauftrag erhielt Prof. Dr. C. Schmieden (Darmstadt).

Marburg: Dr. H. Grötzsch habilitierte sich von Neuem. Prof. Dr. E. R. Neumann wurde emeritiert.

München, Techn. Hochschule. Einen Lehrauftrag erhielt Dr. W. Damköhler.

Münster i. W.: Berufen wurde der o. Professor a. d. Universität Jena Dr. F. K. Schmidt. Er wird als Gastprofessor Vorlesungen a. d. Universität Berlin halten. Mit seiner Vertretung wurde der Doz. Dr. Th. Schneider (Göttingen) beauftragt.

Dr. H. Ulm wurde zum a. o. Professor ernannt.

Prof. Dr. H. Behnke ist für ein Semester als Gast an die Universität Upsala eingeladen.

Rostock: Der o. Prof. der angew. Mathematik an der Universität Halle Dr. Harry Schmidt erhielt einen Ruf auf das Ordinariat der Mathematik.

Stuttgart: Als Nachfolger von Prof. Dr. W. Kutta wurde Prof. Dr. F. Lösch (Rostock) berufen.

Dr. O. Baier wurde zum a. o. Professor ernannt.

Tübingen: Als o. Professor wurde Prof. Dr. E. Kamke rehabilitiert. Prof. Dr. G. Hamel (Berlin) wurde eine Gastprofessur übertragen.

## Betr.: ERNEUERUNG DES ABONNEMENTS

Wir bitten unsere Bezieher an die rechtzeitige Erneuerung des Abonnements zu denken, soweit zunächst nur ein Vierteljahres-Bezug bestellt wurde.

Bei Post-Abonnement muß die Erneuerung bis spätestens zum 26. des letzten Quartals-Monats bei dem zuständigen Postamt erfolgen. Bei Bezug durch eine Buchhandlung oder durch den Verlag bitten wir den Buchhändler oder den Verlag rechtzeitig zu verständigen, daß das Abonnement verlängert werden soll.

Verantwortlich für den Inhalt: Prof. Dr. Fr. A. Willers, Dresden; für den Verlag: H. Kaesser, Berlin. Verlag: Akademie-Verlag GmbH., Berlin N 4, Chausseest. 106, Fernsprecher: 42 50 01 (Verlag App. 274, Vertrieb App. 275), Postscheckkonto: Berlin 35 021. Bestell- und Verlagsnummer dieses Heftes: 1009/25—27/3. Die Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik erscheint monatlich. Bezugspreis: Vierteljährlich RM 15.— zuzüglich Bestellgeld, Einzelheft RM 6.—. Verantwortlich für den Anzeigenteil: Curt F. W. Schreiber, Berlin. Druck: Julius Beltz, Langensalza. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 245 der Sowjetischen Militär-Verwaltung in Deutschland.

(Th. B.-Nr. 04011/16 b) Julius Beltz, Buchdruckerei, Langensalza. — Nr. 888.

L.-Nr. 245